2022年北京高考适用

平面解析几何

高考数学总复习 专题复习讲义

墨相 编

平面解析几何讲义

写在前面

高三毕业后，按照自己在高考前的预想，把自己高中数学学科的思路通过专题讲义的形式记录下来，聊以作为自己高三拼搏的存证，也为往后参加北京高考的学生避雷，提供一条我认为相对正确的思路的参考资料.因此，讲义集中的第一册《平面解析几何专题讲义》就这样在十数日的筹备和校对中诞生了.

其实，我在高中阶段平面几何模块的学习过程是挺曲折的.高一旧教材必修 2 直线与圆的学习中，因对教材基础知识的不重视、完成课后练的习不细致，导致直线与圆模块的知识点学得似是而非，并没有从中认真感知解析几何的基本内容，只是一味追求能做出简单题和中档题即可.高二旧教材选修 2-1 圆锥曲线的学习中，又因对教材方向错误的钻牛角尖，同时还无脑地记忆着未理解的许多结论和技巧、粗暴地在刷题中不加思考地追求题型方法.总之，在错误的时间点做足了错误的事情——的确下了很大的功夫，但是很多都是迷茫而莽撞的无用功，这也导致在高三总复习的过程中，我不得不从头研读教材、教参、课程标准等材料，重新领会高中平面解析几何的要求、内容，感知知识点之间的内在练习，同时也刷了数量非常巨大的题，在不参考他人思路的情况下，自己打磨出了一套完整的解析几何应试体系，也就是在本讲义中将落实的一套体系——经验证，甚至可以用于联赛一试压轴题，我认为是一套完善的、适合于大多数学生的水平的思路体系：

首先，从基础知识入手，以一章专门用以阐述我对教材知识体系的重构和解读，让读者得以在接触应试体系之前，结合教材把基础知识部分进行查漏补缺，在后期做题中可以较为熟练地应用所学.同时，在该章节的最后，我选用了一些人大附中往届一轮复习校本教材中的题目，以及少量我认为可以较好体现知识点的试题，用以对前序学习进行自测.

之后，分别从解析几何小题和大题两个模块进行针对性梳理.小题部分，首先提供了以初中教材整理为主的平面几何图形特征的梳理，其次通过我学习过程中自己思考的分类方法，将近两年的北京模拟题分成“基本概念的应用及拓展”、“基本公式及运算”、“几何特征的应用”三个专题，读者可以在解题的过程中自行理解我的分类依据，从中衍生出自己的分类思路.

大题部分，在破题思路、处理技巧、题型方法的大思路下，分别对每个模块进行了系统性综述，并且对每个模块都配了北京最近真题和模拟题为主的例题和练习题，所有例题的解析都是我学习的过程中笔记衍生而来的，所有练习题亦都是我在总复习过程中做过的习题，我所认为均可作为每个专题的代表性试题.

上述内容是本讲义的全部内容，其实按照原计划本还要以一个专门的专题来体现高等几何知识在高中解析几何试题中的应用，但是为避免读者对这部分的知识引以为结论，在日常的练习和考试中胡乱使用，故从正文中全数删去，作为补充材料会之后在公众号中以专题资料的形式分享.

在内心深处，我一直认为自己是数学教育的受益者，学校里，曲老师让我重拾信心，产生对数学真挚的热爱，在我走偏道路时指出错误，在我受到打击失落时慰藉我，让我再次重燃信心和激情，在高二、高三两年对我的学习和生活提供了极其巨大的帮助，三言两语难道尽；宁老师在无数次晚自习的最后两节课为我提供长时间的答疑，宽容了我学习计划上的自主与任性，给予了我很大自主安排的空间，还为我提供了很多的行之有效的建议.学校外，和多年的好友，现是西昌非常优秀的青年数学教师和班主任的桥哥分享交流了好多我数学学习、甚至生活中的困惑，不仅在知识层面上得到满足，亦在前路迷茫时为我指引方向；学而思的艾老师，在高三以前素未谋面，并不是艾老师直接的学生，却在无数次我遇到问题时无私地为我答疑解惑.艾老师的三言两语往往就道破了题目最纯粹和本质的内容，让我在感到自己知识层面的渺小的同时充满提升自己能力勇气和决心，在高考结束后与艾老师有了见面的机会，有了很多交流，深深认识到自己对数学的理解依然有差距，让我有了更多教研员视角的观感.还有海淀郑老师，在高三一年中无私地为我提供了很多次的答疑，为我的学习亦提供了很大的帮助.每位老师都将一生感恩.

能遇到这么多的好老师，是人生一大幸事.本来按照自己原先的规划，会在大学会专修教育数学，未来做一名光荣的人民教师.虽然现在与教育数学渐行渐远是定局，但一定会以更多方式，继续纯粹地践行自己的初心，一生热爱数学，以业余爱好者的微薄之力助力数学教学.

§1　教材基础知识汇编

1.1　直线与方程

【课程标准】

①在平面直角坐标系中，结合具体图形，探索确定直线位置的几何要素.

②理解直线的倾斜角和斜率的概念，经历用代数方法刻画直线斜率的过程，掌握过两点的直线斜率的计算公式.

③能根据斜率判定两条直线平行或垂直.

④根据确定直线位置的几何要素，探索并掌握直线方程的几种形式（点斜式、两点式及一般式）.

⑤能用解方程组的方法求两条直线的交点坐标.

⑥探索并掌握平面上两点间的距离公式、点到直线的距离公式，会求两条平行直线间的距离.

【知识汇编】

一、直线的倾斜角与斜率

构成直线的因素：点、方向

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{方向} & \rightarrow & \text{倾角} & \rightarrow & \text{倾角正切} & \rightarrow & \text{斜率} & \rightarrow & \text{方向与斜率} \\ & & & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & & & \text{公式} & & (1,k) \end{array}$$

1.倾角：x轴正向与直线l向上的方向所成的角α，取值范围为$[0,\pi)$.

2.斜率：规定一条直线的倾角α的正切值$tan\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x_1\neq x_2)$叫作直线的斜率，用小写字母$k$表示.

3.斜率与方向向量：直线P_1P_2上向量$\overrightarrow{P_1P_2}$及其共线向量都是直线的方向向量，坐标表示为(x_2-x_1,y_2-y_1).当直线P_1P_2与x轴不垂直，即$x_2-x_1\neq 0$时，向量$\frac{1}{x_2-x_1}(x_2-x_1,y_2-y_1)$也是直线$P_1P_2$的方向向量，即$(1,\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1})=(1,k)$.因此，当直线的斜率存在且为$k$时，它的一个方向向量的坐标为$(x,y)$，则$k=\frac{y}{x}$.

4.两条两直线的平行与垂直：$l_1/\!/l_2\Leftrightarrow k_1=k_2$；显然，当$\alpha_1=\alpha_2=\frac{\pi}{2}$时，直线斜率不存在，此时$l_1/\!/l_2$.

如果两直线都有斜率，则$l_1\perp l_2\Leftrightarrow k_1\cdot k_2=-1$.

两直线相交的夹角问题：若θ为l_1和l_2的夹角，则$tan\,\theta=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}\right|$($k$都存在)，当$1+k_1k_2=0$，$\theta=90°$.

二、直线的方程

1.解析几何的研究对象是曲线，“方程的曲线”和“曲线的方程”是解析几何的两个研究内容.

直线方程满足“纯粹性”和“完备性”两个条件，即直线上的每个点都在关系式上，关系式上的每个点都在直线上，才可以说满足“纯粹性”和“完备性”两个条件，才可以说该关系式为直线的方程.

2.建立直线的方程，即利用直线位置的几何要素，建立直线上任意一点的坐标都满足的关系式.

直线方程分为：点斜式、斜截式、两点式、截距式、一般式、点法式.

（1）准备知识：$k=\frac{y-y_0}{x-x_0}$，该式子的前提是斜率存在.

（2）六种直线方程及限制条件

点斜式：$y-y_0=k(x-x_0)$，当倾角为$\frac{\pi}{2}$的时候，$tan\frac{\pi}{2}$没有意义，直线无斜率，方程不能用点斜式表示.

斜截式：当(x_0,y_0)为$(0,b)$时，点斜式方程为$y-b=k(x-0)$，即$y=kx+b$，限制条件同点斜式.

两点式：将斜率代入点斜式，得到两点式：$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$，当$y_2=y_1$或$x_2=x_1$时，方程没有两点式.

截距式：将两点$(a,0)$，$(0,b)$代入两点式，得到截距式$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，$a,b$为两坐标轴上的截距，都不为0.

一般式：$Ax+By+C=0$，A,B不同时为0.

点法式：法向量$\vec{n}=(A,B),P(x_0,y_0)$,直线上一点 $Q(x,y)$，则根据$\vec{n}\cdot\overrightarrow{PQ}$，得$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$.以上证法是北师版教材给出的；另外，人教A版教材提供了联立、代入(x_0,y_0)到一般式的思路.

（3）参数方程：$\begin{cases}x=x_0+mt\\y=y_0+nt\end{cases}$，其中$(m,n)$的几何意义为这条直线的方向向量.

三、直线的交点坐标与距离公式

1.直线交点坐标：联立两直线方程，如：$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1=0\\A_2x+B_2y+C_2=0\end{cases}$.

2.两点间距离公式：$\overrightarrow{P_1P_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$，则$|\overrightarrow{P_1P_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

3.点到直线距离公式：直线方程$Ax+By+C=0$，垂足$Q(x,y)$，$P(x_0,y_0)$，则：$|PQ|=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

4.两条平行直线间的距离公式：已知两直线l_1:$Ax+By+C_1=0$和l_2:$Ax+By+C_2=0$，在l_1上取一点$P(x_0,y_0)$，则该点到直线l_2的距离即是两条平行直线间的距离，即$d=\frac{|Ax_0+By_0+C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.因为点$P$在直线$l_1$上，所以$Ax_0+By_0=-C_1$，因此$d=\frac{|Ax_0+By_0+C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}=d=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

四、对称问题

1.中心对称：点(x,y)关于$A(a,b)$的对称点坐标为$(2a-x,2b-y)$.（中点坐标公式）

曲线$f(x,y)=0$关于点$A(a,b)$的对称曲线方程为$f(2a-x,2b-y)=0$.

2.轴对称：点(x,y)关于直线$Ax+By+C=0$的对称点(x',y')，则$\begin{cases}\frac{y'-y}{x'-x}(-\frac{A}{B})=-1\\A\frac{x+x'}{2}+B\frac{y+y'}{2}+C=0\end{cases}$.

3.常用对称关系：点(a,b)关于x轴的对称点为$(a,-b)$，关于y轴的对称点为$(-a,b)$，关于原点的对称点为$(-a,-b)$；关于直线$y=x$的对称点为(b,a)，关于直线$y=-x$的对称点为$(-b,-a)$，关于直线$y=x+m$的对称点为$(b+m,a+m)$，关于直线$y=-x+m$的对称点为$(-b+m,-a+m)$.

一般地，平面直角坐标系中，设点$M(x_1,y_1)$关于直线l:$Ax+By+C=0$的对称点为$N(x_2,y_2)$，则点$N(x_2,y_2)$的坐标公式为：$\begin{cases}x_2=x_1-2\cdot\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cdot\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\\y_2=y_1-2\cdot\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\cdot\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\end{cases}$（$B=0$亦适用）.

五、直线系——具有某种共同性质的所有直线的集合

1.平行直线系：与直线$Ax+By+C=0$平行的直线系方程为$Ax+By+C_1=0(C_1\neq C)$.

2.垂直直线系：与直线$Ax+By+C=0$垂直的直线系方程为$Bx-Ay+C_1=0(C_1\neq C)$.

3.过定点$P(a,b)$的直线系方程（点法式）：$A(x-a)+B(y-b)=0,a,b$不同时为0.

4.过两交点的直线系：过两相交直线l_1： $A_1x+B_1y+C_1=0$和l_2： $A_2x+B_2y+C_2=0$交点的直线系方程为$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$，此直线系不包括$l_2$.

5.推广到过曲线$f_1(x,y)=0$与$f_2(x,y)=0$的交点的方程为：$f_1(x)+\lambda f_2(x)=0$.

1.2　圆与方程

【课程标准】

①回顾确定圆的几何要素，在平面直角坐标系中，探索并掌握圆的标准方程与一般方程.

②能根据给定直线、圆的方程，判断直线与圆、圆与圆的位置关系.

③能用直线和圆的方程解决一些简单的数学问题与实际问题.

【知识汇编】

一、确定一个圆（定义）

几何条件代数化是解析几何的重要手段.通过条件转化，我们可以把具象的曲线用抽象的方程来表示，而几何条件代数化的重要依据就是基本图形的定义域性质.类似于直线方程的建立，我们在为圆建立曲线方程之前需要先考虑确定圆的几何要素，下面是两个表达的方向.

1.距离定义

（1）到定点（定位）等于定长（定形）的轨迹.

（2）到两定点距离的平方和为定值点的轨迹.

（3）到两定点的距离之比为一个不为 1 的常数（阿波罗尼斯圆）.

定理：一般地，平面内到两个定点距离之比为常数$\lambda(\lambda > 0\ ,\ \lambda \neq 1)$的点的轨迹是圆，此圆被叫做“阿波罗尼斯圆”．特殊地，当$\lambda = 1$时，点 P 的轨迹是线段 AB 的中垂线.

2.张角定义

（1）到两定点张角为 90°.

（2）到两定点张角值为定值.

（3）对角互补（四点共圆的性质）.

二、定义的表达及圆的方程

教材采用的是距离定义，首先用点集来表达以$A(a,b)$为圆心，r为半径的$\odot A$，$r \neq 0$：

$$P = \{M||MA| = r\}$$

1.圆的标准方程：根据两点间距离公式，$M(x,y)$满足$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = r$，化简得圆的标准方程

$$(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$$

2.圆的一般方程：把圆的标准方程展开如下（称之为一般方程）：

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0(D^2+E^2-4F>0) \Leftrightarrow (x+\frac{D}{2})^2+(y+\frac{E}{2})^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4}$$

其中：圆心坐标为$(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2})$，半径为$r=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$

①若$D^2+E^2-4F>0$，则方程表示以$(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2})$为圆心，$r=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$为半径的圆；

②若$D^2+E^2-4F=0$，则方程只表示一个点$(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2})$；

③若$D^2+E^2-4F<0$，则方程不表示任何图形.

同时，根据圆可以被定义为到两定点距离的平方和为定值点的轨迹，也可以有以下表达方式：

3.圆的直径式方程：以点$P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$为圆的直径，设圆上任意一点为$P(x,y)$：

则根据$\overrightarrow{PP_1}\cdot\overrightarrow{PP_2}=0$，故$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$.

另外，人教 A 版教材在课后习题中提到了圆的参数方程：

4.圆的参数方程：$\begin{cases} x=a+r\cos\theta \\ y=b+r\sin\theta \end{cases}$($\theta$为参数)；$\theta$的含义为圆心角.（欲得参数方程，得先化为标准方程）

5.求圆方程的思路：主要用待定系数法.

不论是圆的标准方程还是一般方程，都有三个独立参数，因此需具备三个独立条件才能确定一个圆．求圆的方程常用待定系数法，但要注意灵活选择方程的形式．

三、点与圆

给定点$M(x_0,y_0)$及圆$C:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$．

1.M在圆C内$\Leftrightarrow (x_0-a)^2+(y_0-b)^2<r^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}<0 \Leftrightarrow \angle APB$为钝角$\Leftrightarrow$点$P$在线段$AB$上(除端点)；

2.M在圆C上$\Leftrightarrow (x_0-a)^2+(y_0-b)^2=r^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0 \Leftrightarrow \angle APB$为直角$\Leftrightarrow$点$P$与点$A$或点$B$重合；

3.M在圆C外$\Leftrightarrow (x_0-a)^2+(y_0-b)^2>r^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}>0 \Leftrightarrow \angle APB$为锐角$\Leftrightarrow$点$P$在线段$AB$的延长线或反向延长线上．

四、直线与圆

1.直线与圆的位置关系

（1）三种位置关系：相离、相切和相交．

（2）判断方法

设圆$C:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r>0)$；直线$l:Ax+By+C=0(A^2+B^2\neq 0)$；

①由几何特征判断：圆心$C(a,b)$到直线 l 的距离$d=\frac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$．

$d=r$时，l与C相切；

$d<r$时，l与C相交；

$d>r$时，l与C相离．

②由代数特征判断：列方程组$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2=r^2\\ Ax+By+C=0\end{cases}$

联立得关于x（或y）的一元二次方程，其判别式为Δ，则：

$\Delta=0 \Leftrightarrow l$与$C$相切；

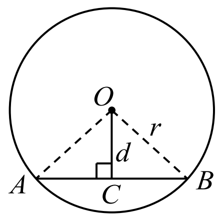
$\Delta>0 \Leftrightarrow l$与$C$相交；

$\Delta<0 \Leftrightarrow l$与$C$相离．

③在直线与圆的关系中，注意利用“圆心角$\Leftrightarrow$弧长$\Leftrightarrow$弦长$\Leftrightarrow$弦心距”进行转化．

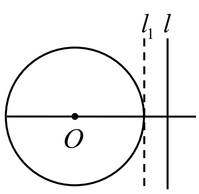
2.弦长及其求法

①几何法：当直线和圆相交时，弦长为l，弦心距为d，半径为r，则$(\frac{l}{2})^2+d^2=r^2$．

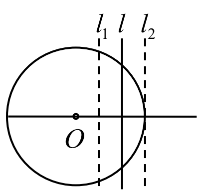


②代数法：设直线l的斜率为k，直线l与圆的两个交点分别为$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，类似圆锥曲线求弦长的方法，圆的弦长$|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_A-x_B|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}|y_A-y_B|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$，其中的$|x_A-x_B|$和$|y_A-y_B|$，可以通过直线和圆联立，消去$y$或$x$后利用韦达定理求解．

③过圆内的一点作圆的弦中最长的是过该点的直径（左图）；最短的是与过该点直径垂直的弦（右图）．



$d=r+d'$



$d=r-d'$

3.圆的切线及切线方程

（1）点在圆上的切线方程（可以通过隐函数求导或替换法）

①过圆$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$上一点(x_0,y_0)的切线方程为：$(x-a)(x_0-a)+(y-b)(y_0-b)=r^2$；

②过圆$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$上一点(x_0,y_0)的切线方程为：$xx_0+yy_0+D\frac{x+x_0}{2}+E\frac{y+y_0}{2}+F=0$.

（2）点在圆外的切线：过圆$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$外一点(x_0,y_0)向圆作切线

设切线方程为$y-y_0=k(x-x_0)$，利用圆心到直线的距离等于半径，求出k即可；

如果 k 只有一解，则意味着有一条切线与 x 轴垂直.

（3）斜率已知的切线

①切线斜率为k与圆$x^2+y^2=r^2$相切的切线方程为：$y=kx\pm r\sqrt{k^2+1}$；

②切线斜率为k与圆$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$相切的切线方程为：$y-b=k(x-a)\pm r\sqrt{k^2+1}$.

五、圆与圆

1.圆与圆的位置关系

（1）五种关系：外离、外切、相交、内切和内含.

（2）判断方法：

①几何法：设两圆圆心分别为O_1、O_2，利用两圆圆心距$|O_1O_2|=d$，与两圆的半径r_1和r_2进行判断：

$d>r_1+r_2$ ⇔两圆外离⇔4 条公切线

$d=r_1+r_2$ ⇔两圆外切⇔3 条公切线

$|r_1-r_2|<d<r_1+r_2$ ⇔两圆相交⇔2 条公切线

$d=|r_1-r_2|\neq 0$ ⇔两圆内切⇔1 条公切线

$0<d<|r_1-r_2|$ ⇔两圆内含⇔没有公切线.（注意特例：两圆是同心圆⇔ $d=0$且$r_1\neq r_2$.）

②代数法：解两个圆的方程所组成的二元二次方程组

若方程组有两组不同的实数解，则两圆相交；

若方程组有两组相同的实数解，则两圆相切；

若无实数解，两圆相离.

（3）公共弦及其求法：若圆C_1：$x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$与圆C_2：$x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$相交，则两圆方程相减，即可得到两圆的公共弦 AB 所在的直线方程.

证明：设两圆C_1、C_2的任一交点坐标为$(x_0\ ,\ y_0)$，则有：

$$x_0{}^2+y_0{}^2+D_1x_0+E_1y_0+F_1=0\cdots①$$
$$x_0{}^2+y_0{}^2+D_2x_0+E_2y_0+F_2=0\cdots②$$

由①－②得：$(D_1-D_2)x_0+(E_1-E_2)y_0+F_1-F_2=0$，因此，$A$、$B$的坐标都满足方程：

$$(D_1-D_2)x+(E_1-E_2)y+F_1-F_2=0$$

又过A、B两点的直线是唯一的，故上述方程即为公共弦AB所在直线的方程.

六、圆系——具有某种共同性质的圆的集合

1.圆与直线：经过圆$C:x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$与直线$l:Ax+By+C=0$两个交点的圆系方程

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F+\lambda(Ax+By+C)=0$$

2.圆与圆：经过圆$C_1:x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$与圆$C_2:x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$两个交点的圆系方程：$x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1+\lambda(x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2)=0$

其中$\lambda\neq-1$，且不包含圆$C_2:x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$；

当$\lambda=-1$时，方程表示两圆公共弦所在直线的方程.

3.圆与切点：与圆$C:x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$相切于点(x_0,y_0)的圆系方程

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F+\lambda[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]=0$$

4.圆与切线：经过圆$C:x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$与直线$l:Ax+By+C=0$相切的圆系方程

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F+\lambda(Ax+By+C)=0$$

1.3　圆锥曲线与方程

【课程标准】

①了解圆锥曲线的实际背景，感受圆锥曲线在刻画现实世界和解决实际问题中的作用.

②经历从具体情境中抽象出椭圆的过程，掌握椭圆的定义、标准方程及简单几何性质.

③了解抛物线与双曲线的定义、几何图形和标准方程，以及它们的简单几何性质.

④通过圆锥曲线与方程的学习，进一步体会数形结合的思想.

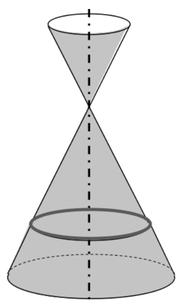
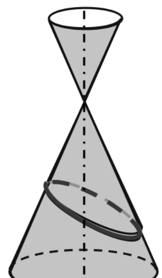
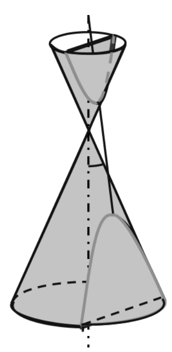
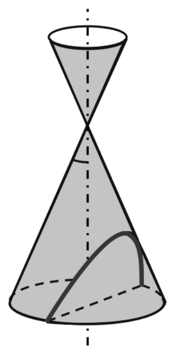
⑤了解椭圆、抛物线的简单应用.

【知识汇编】

一、圆锥与圆锥曲线

无论人教 A 版还是北师版的教材中，都提到通过用平面截取圆锥面，根据截面与圆锥面的轴的夹角不同，可以得到圆、椭圆、抛物线、双曲线，而这些截得的图形，都可以被统称为圆锥曲线.因此，我们进一步对截面与圆锥面夹角进行讨论：（北师版选必 1，P75）

设圆锥的轴截面顶角为2θ，圆锥的轴与截面所成的角为α，其中$\theta,\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$.

				
成角	$\alpha=\frac{\pi}{2}$	$\alpha>\theta$	$\alpha<\theta$	$\alpha=\theta$
类型	圆	椭圆	双曲线	抛物线

二、圆锥曲线的定义

类似圆，圆锥曲线也有不同的定义方法，不同的定义方法有不同对曲线方程的求解.（均椭圆为例）

1.第一定义

（1）椭圆：平面内与两个定点F_1、F_2的距离的和等于常数$2a$（大于$|F_1F_2|$）的点的轨迹；其中，两个定点称做椭圆的焦点，焦点间的距离叫做焦距.

（2）双曲线：平面内与两个定点F_1 、F_2的距离的差的绝对值等于常数且小于$|F_1F_2|$的点的轨迹；其中，两个定点叫做双曲线的焦点，焦点间的距离叫做焦距.

①当$0<2a<|F_1F_2|$，$|PF_1|-|PF_2|=2a$与$|PF_2|-|PF_1|=2a$分别表示双曲线的一支.若有“绝对值”，点的轨迹表示双曲线的两支；若去掉“绝对值”，点的轨迹仅为双曲线的一支；

②当$2a=|F_1F_2|$时，点的轨迹为以F_1，F_2为端点的两条射线；

③当$2a>|F_1F_2|$时，轨迹不存在(或不表示任何图形)；

④当$2a=0$时，点的轨迹是线段F_1F_2的垂直平分线.

（3）抛物线：平面内与一个定点的距离等于到一条定直线的距离点的轨迹；其中，定点为抛物线的焦点，定直线叫做准线.

（4）椭圆、双曲线第一定义拓展

①到两定点的距离之商为定值（不等于 1）的点的轨迹是阿波罗尼斯圆；

②到两定点的距离之积为定值（该定值为正数）的点的轨迹是卡西尼卵形线.

2.第二定义

平面内与一个定点的距离和到一条定直线的距离的比是常数的点的轨迹.（其中，定点为焦点，定直线叫做准线，常数 e 叫做离心率）

（1）椭圆：$0<e<1$；

设$M(x,y)$是椭圆上任意一点，定点为$F_1(-c,0)$，定直线为$x=\frac{a^2}{c}$，常数$e=\frac{c}{a}$，由上述定义可得：$\frac{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}{\left|\frac{a^2}{c}-x\right|}=\frac{c}{a}$，变形即可得到标准方程.

（2）双曲线：$e>1$；

（3）抛物线：$e=1$.

3.第三定义

已知坐标轴上关于原点对称的两个定点，那么，到这两定点连线的斜率之积为定值$e^2-1(0<e<1)$的点的轨迹.（其中，定点为短轴或长轴顶点）

（1）椭圆：$0<e<1$；

设$M(x,y)$是椭圆上任意一点，两个定点为$A_1(-a,0)$、$A_2(a,0)$，定直线为$x=\frac{a^2}{c}$，常数$e=\frac{c}{a}$，由上述定义得：将$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$\frac{y^2}{(x-a)(x+a)}=-\frac{b^2}{a^2}$，所以椭圆上动点到两顶点$(a,0)$、$(a,0)$的连线的斜率之积等于常数.

（2）双曲线：$e>1$；

三、圆锥曲线的方程、基本参数

1.椭圆

（1）标准方程：$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)\Leftrightarrow \text{中心在原点，焦点在}x\text{轴上；}\\ \frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)\Leftrightarrow \text{中心在原点，焦点在}y\text{轴上.}\end{cases}$

（2）参数方程：$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)\Leftrightarrow \begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=b\sin\theta\end{cases};\\ \frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)\Leftrightarrow \begin{cases}x=b\cos\theta\\ y=a\sin\theta\end{cases}.\end{cases}$

参数方程中的参数θ不是所谓的“椭圆心角”，而是物理上的离心角，可结合离心率理解；同时，要和圆的参数方程中的圆心角分开.

（3）基本参数

①对称性：标准方程的图形，不仅关于 x 轴和 y 轴轴对称，同时，还关于原点中心对称.

②顶点：$A_1(-a,0)$，$A_2(a,0)$，$B_1(0,-b)$，$B_2(0,b)$，或$A_1(-b,0)$，$A_2(b,0)$，$B_1(0,-a)$，$B_2(0,a)$.

③长轴和短轴：长轴为 $2a$，短轴为 $2b$，注意区分长半轴为 a，短半轴为 b.

④焦点：$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$；或$F_1(0,-c)$，$F_2(0,c)$.

⑤焦距：$|F_1F_2|=2c(c>0)$，同时，半焦距 c、长半轴为 a 和短半轴为 b 是一组勾股数，满足关系式：$c^2=a^2-b^2$.

⑥离心率：$e=\frac{c}{a}(0<e<1)$；离心率越大，椭圆越扁.（$cos\angle OF_1B_1=e$）.

⑦准线：$x=\pm\frac{a^2}{c}$；或$y=\pm\frac{a^2}{c}$.

⑦焦准距：$p=\frac{a^2}{c}-c=\frac{b^2}{c}$.

⑧通径：$2ep=\frac{2b^2}{a}$ (p为焦准距).

⑨焦半径：椭圆上的点到焦点的距离；设$P(x_0,y_0)$为椭圆上的一点，F_1在负半轴，F_2在正半轴；

焦点在x轴：焦半径$\begin{cases}|PF_1|=a+ex_0\\|PF_2|=a-ex_0\end{cases}$(左加右减)；

焦点在y轴：焦半径$\begin{cases}|PF_1|=a+ey_0\\|PF_2|=a-ey_0\end{cases}$(上加下减).

⑩焦点弦：若过焦点的直线与椭圆相交于两点$A(x_A,y_A)$和$B(x_B,y_B)$，则称线段$|AB|$为焦点弦.

当焦点弦过左焦点时，焦点弦的长度$|AB|=2a+e(x_A+x_B)$，仅与它的中点的横坐标有关；当焦点弦过右焦点时，有$|AB|=2a-e(x_A+x_B)$.

类似地，当焦点在y轴上时，焦点弦$|AB|=2a+e(y_A\pm y_B)$，仅与它的中点的纵坐标有关.

过椭圆焦点的所有弦中通径（垂直于焦点的弦）最短，通径为$2ep=\frac{2b^2}{a}$ (p为焦准距).

2.双曲线

（1）标准方程$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)\Leftrightarrow 中心在原点，焦点在x轴上；\\\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)\Leftrightarrow 中心在原点，焦点在y轴上.\end{cases}$.

（2）参数方程$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)\Leftrightarrow\begin{cases}x=a\sec\theta\\y=b\tan\theta\end{cases}\\\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)\Leftrightarrow\begin{cases}x=b\tan\theta\\y=a\sec\theta\end{cases}\end{cases}$.

（3）基本参数

①对称性：标准方程的图形，不仅关于 x 轴和 y 轴轴对称，同时还关于原点中心对称.

②顶点：$A_1(-a,0)$，$A_2(a,0)$，或$A_1(0,-a)$，$A_2(0,a)$.

③实轴和虚轴：实轴为 $2a$，虚轴为 $2b$；注意区分实半轴和虚半轴.

④焦点：$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$；或$F_1(0,-c)$，$F_2(0,c)$.

⑤焦距：$|F_1F_2|=2c(c>0)$，同时，半焦距 c、长半轴为 a 和短半轴为 b 是一组勾股数，满足关系式：$c^2=a^2+b^2$.

⑥离心率：$e=\frac{c}{a}(e>1)$，离心率越大，开口越大；

双曲线的离心率是描述双曲线“张口”大小的一个重要数据，分析和上面的椭圆类似，譬如，当e接近 1 时，b越来越小，双曲线的“张口”越来越小.

⑦准线：$x=\pm\frac{a^2}{c}$；或$y=\pm\frac{a^2}{c}$.

⑧焦准距：$p=\frac{a^2}{c}-c=\frac{b^2}{c}$.

⑨通径：$2ep=\frac{2b^2}{a}$ (p为焦准距).

⑩焦半径：设$P(x_0\ ,\ y_0)$为双曲线上的一点，由于双曲线分两支，故焦半径分为两种.

焦点在x轴：P在左支$\begin{cases}|PF_1|=-a-ex_0\\|PF_2|=a-ex_0\end{cases}$，$P$在右支$\begin{cases}|PF_1|=a+ex_0\\|PF_2|=-a+ex_0\end{cases}$；

焦点在y轴：P在下支$\begin{cases}|PF_1|=-a-ey_0\\|PF_2|=a-ey_0\end{cases}$，$P$在上支$\begin{cases}|PF|_1=a+ey_0\\|PF|_2=-a+ey_0\end{cases}$.

⑪焦点弦：若过焦点的直线与双曲线的一支相交于两点$A(x_A\ ,\ y_A)$和$B(x_B\ ,\ y_B)$，则称线段$|AB|$为焦点弦．双曲线焦点弦的推导方法与椭圆类似，结果也是仅与弦中点的横坐标或者纵坐标有关．

⑫双曲线的渐近线：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)\Leftrightarrow y=\pm\frac{b}{a}x$；或$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)\Leftrightarrow y=\pm\frac{a}{b}x$．

渐近线方程也可以表示为$\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=0\Rightarrow$共渐近线双曲线可设为：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\lambda$；同理，若已知渐近线的方程为$mx\pm ny=0$，则双曲线的方程可设为：$m^2x^2-n^2y^2=\lambda$ ($\lambda\neq 0$且为常数)．

与双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$有公共渐近线的双曲线系方程是：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\lambda$ ($\lambda>0$，焦点在x轴上，$\lambda<0$，焦点在y轴上)，若题目中告知双曲线渐近线方程，可设此方程，利用待定系数法进行计算．

3.抛物线

$$（1）标准方程\begin{cases}焦点在x轴上\begin{cases}y^2=2px(p>0)\Leftrightarrow 开口向右\\ y^2=-2px(p>0)\Leftrightarrow 开口向左\end{cases}\\ 焦点在y轴上\begin{cases}x^2=2py(p>0)\Leftrightarrow 开口向上\\ x^2=-2py(p>0)\Leftrightarrow 开口向下\end{cases}\end{cases}$$

$$（2）参数方程\begin{cases}焦点在x轴上\begin{cases}y^2=2px(p>0)\Leftrightarrow\begin{cases}x=2pt^2\\ y=2pt\end{cases}(t为参数，t\in R)\\ y^2=-2px(p>0)\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2pt^2\\ y=2pt\end{cases}(t为参数，t\in R)\end{cases}\\ 焦点在y轴上\begin{cases}x^2=2py(p>0)\Leftrightarrow\begin{cases}x=2pt\\ y=2pt^2\end{cases}(t为参数，t\in R)\\ x^2=-2py(p>0)\Leftrightarrow\begin{cases}x=2pt\\ y=-2pt^2\end{cases}(t为参数，t\in R)\end{cases}\end{cases}$$

（3）基本参数：以抛物线标准方程$y^2=2px(p>0)$为例．

①p的几何意义：参数p是焦点到准线的距离，称为焦准距，故p恒为正数．

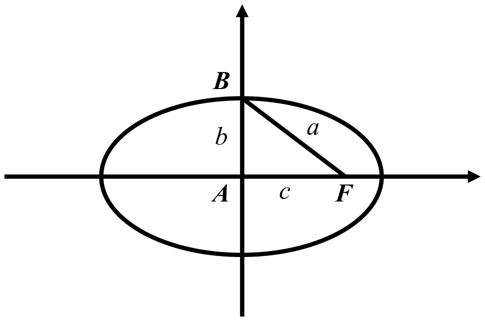
②顶点：为原点$O(0,0)$，以x轴为对称轴，且没有对称中心，焦点为$F(\frac{p}{2},0)$，准线为$x=-\frac{p}{2}$，由于抛物线的离心率e都等于1，故抛物线通径为$2ep=2p$；

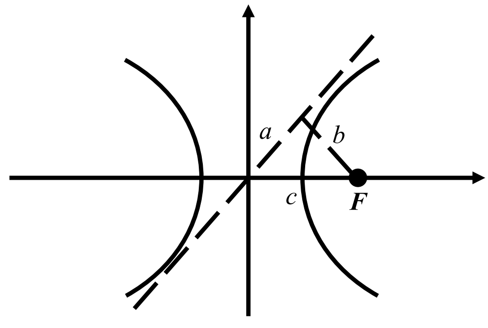
③焦半径：$|PF|=x_0+\frac{p}{2}$，实质就是抛物线的定义．

以焦半径为半径的圆：以抛物线上一点为圆心、焦半径为半径的圆必与准线相切．
以焦半径为直径的圆必与y轴相切．
以焦点弦为直径的圆必与准线相切．
以两交点投影为直径的圆必经过原点．

④焦点弦：$x_1+x_2+p=\frac{p}{1-cos\,\theta}=\frac{2p}{sin^2\,\theta}(\theta\neq 0)$；特殊地，当$\theta=\frac{\pi}{2}$时，为通径$2p$．

4.椭圆、双曲线的特征三角形





5.椭圆和双曲线的焦点三角形

（1）已知椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，左、右两焦点分别为$F_1$ 、F_2，$P(x_0,y_0)$是椭圆上一点，在焦点三角形PF_1F_2中，$\angle F_1PF_2=\theta$，r 为$\triangle PF_1F_2$的内切圆半径，则有：

①$|PF_1||PF_2|=\frac{2b^2}{1+cos\,\theta}$；②$S_{\triangle F_1PF_2}=b^2\,tan\frac{\theta}{2}=c|y_0|=(a+c)\ r$.

（2）已知双曲线方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0\ ,\ b>0)$，左右两焦点分别为$F_1$ 、F_2，$P(x_0,y_0)$是双曲线上一点，在焦点三角形PF_1F_2中，$\angle F_1PF_2=\theta$，则有：

①$|PF_1||PF_2|=\frac{2b^2}{1-cos\,\theta}$；②$S_{\triangle F_1PF_2}=\frac{b^2}{tan\frac{\theta}{2}}=c|y_0|$.

6.圆锥曲线的光学性质

（1）椭圆：从椭圆一个焦点发出的光线，经过椭圆的反射后，反射光线在下一次到达椭圆前，会经过另一个焦点．椭圆上的点 P 处的切线平分焦点$\triangle PF_1F_2$在点 P 处的外角，切线的法线平分$\angle F_1PF_2$.

（2）双曲线：从双曲线一个焦点发出的光线，经过双曲线的反射后，反射光线的反向延长线会经过另一个焦点．双曲线上的点 P 处的切线平分焦点$\triangle PF_1F_2$在点 P 处的外角，切线的法线平分$\angle F_1PF_2$.

（3）抛物线：从抛物线的焦点发出的光线，经过抛物线的反射后，反射光线平行于抛物线对称轴．

四、直线与圆锥曲线

1．直线与椭圆的位置关系

设直线$l{:}\,y=kx+b$与椭圆$C{:}\,F(x,y)=0$，联立方程组$\begin{cases}y=kx+b\\F(x,y)=0\end{cases}$，通过研究其解的个数；

具体可分以下三步：

第一步：消去一个未知数（如消去y），得到核心方程$Ax^2+Bx+C=0$；

第二步：在$\Delta=B^2-4AC>0$的前提下，写出关于交点的韦达并表达所求；

第三步：运用代数方法解决问题.

应特别注意：

①首先检验直线的l斜率不存在时是否满足题意；

②在写出$x_1+x_2=-\frac{B}{A}$；$x_1x_2=\frac{C}{A}$之前，要确保$\Delta\geq 0$

2．直线与椭圆的位置关系问题，常涉及求取值范围或最值的问题，其解法思路是：找准变量，建立目标函数，转化为求函数的最大（小）值问题．解题时不但要注意自变量范围的确定，还需要对整理后的函数熟练地运用二次函数、分离常数项、均值不等式、导数等方法求其最大（小）值．

3．注意总结面积的表达方式、线段长度的表达方式、点 P 在以AB为直径的圆上，平行四边形、菱形、三点共线等各种几何条件的转化．

4．弦长公式：

当直线的斜率存在时，$l=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{(1+k^2)\cdot[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}$

或当 k 存在且不为零时，$l=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}|y_1-y_2|$，

其中$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$是直线与圆锥曲线的交点坐标.

1.4 典型例题选编

1.4.1 直线与方程

考点 1：倾斜角与斜率

例 1.如果$A\cdot C<0$且$B\cdot C<0$，那么直线$Ax+By+C=0$不通过

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

例 2.直线$x\cos\alpha+\sqrt{3}y+2=0$的倾斜角的取值范围是____________.

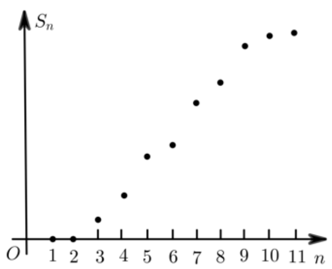
例 3."$m=\frac{1}{2}$"是"直线$(m+2)x+3my+1=0$与$(m-2)x+(m+2)y-3=0$相互能直"的

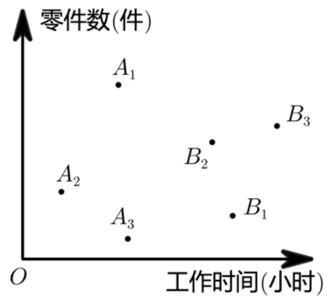
A．充分必要条件　　B．充分而不必要条件　　C．必要而不充分条件　　D．既不充分也不必要条件

例 4.点$P(x,y)$在以$A(-3,1),B(-1,0),C(-2,0)$为顶点的$\triangle ABC$的内部运动（不包含边界），则$\frac{y-2}{x-1}$的取值范围是　　A．$[\frac{1}{2},1]$　　B．$(\frac{1}{2},1)$　　C．$[\frac{1}{4},1]$　　D．$(\frac{1}{4},1)$

例 5.（2012 北京）某棵果树前n年的总产量S_n与n之间的关系如下左图所示，从目前记录的结果看，前m年的年平均产量最高，m的值为

A.5　　B.7　　C.9　　D.11





例 6.（2017 北京理）三名工人加工同一种零件，他们在一天中的工作情况上右图所示，其中点A_i的横、纵坐标分别为第i名工人上午的工作时间和加工的零件数，点B_i的横、纵坐标分别为第 i 名工人下午的工作时间和加工的零件数，$i=1,2,3$.

①记Q_i为第i名工人在这一天中加工的零件总数，则Q_1,Q_2,Q_3中最大的是____________.

②记p_i为第i名工人在这一天中平均每小时加工的零件数，则p_1,p_2,p_3中最大的是____________.

例 7.（2011 北京理）设$A(0,0),B(4,0),C(t+4,4),D(t,4)(t\in R)$．记$N(t)$为平行四边形$ABCD$内部（不含边界）的整点的个数，其中整点是指横、纵坐标都是整数的点，则函数$N(t)$的值域为

A．{9,10,11}　　B．{9,10,12}　　C．{9,11,12}　　D．{10,11,12}

考点 2：直线的方程

例 1.若三点$A(2,2),B(a,0),C(0,b)(ab\neq 0)$共线，则$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$的值等于__________.

例 2.过点$P(2,1)$作直线 l 分别交 x，y 的正半轴于A,B两点

（Ⅰ）求$\triangle ABO$面积的最小值及相应的直线 l 的方程；

（Ⅱ）当$|OA|+|OB|$取最小值时，求直线 l 的方程；

（Ⅲ）当$|PA|\cdot|PB|$取最小值时，求直线 l 的方程.

例 3.已知两点$M(-5,0)$和$N(5,0)$，若直线上存在点 P，使$|PM|-|PN|=6$，则称该直线为“β型直线”．给出下列直线：①$y=x+1$；②$y=2$；③$y=\frac{4}{3}x$；④$y=2x+1$，其中为“β型直线”的是

A．①②　　B．①③　　C．①④　　D．③④

例 4.已知$\triangle ABC$中，$B(1,2)$, BC边上的高线AD方程为$x-2y+1=0$角 A 平分线方程为$y=0$，求AC,BC边所在直线方程．

例 5.函数$y=a^{x+1}-2(a>0,a\neq 1)$的图象恒过定点A，若点A在直线$mx+ny+1=0$上，其中m、$n>0$，则$\frac{1}{m}+\frac{2}{n}$的最小值为_____．

考点 3：直线的交点坐标与距离公式

例 1.设直线$l_1: y=k_1x+1$，$l_2: y=k_2x-1$，其中实数k_1,k_2满足$k_1k_2+2=0$．

（Ⅰ）证明l_1与l_2相交；

（Ⅱ）证明l_1与l_2的交点在椭圆$2x^2+y=1$上．

例 2.与直线$l: y=2x$平行，且到 l 的距离为$\sqrt{5}$的直线方程为

A．$y=2x\pm\sqrt{5}$　　B．$y=2x\pm 5$　　C．$y=-\frac{1}{2}x\pm\frac{5}{2}$　　D．$y=-\frac{1}{2}x\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$

例 3.到两坐标轴距离相等的点的轨迹方程是

A．$x+y=0$　　B．$x-y=0$　　C．$|x|-y=0$　　D．$|x|-|y|=0$

例 4.已知三条直线$l_1: 2x-y+a=0(a>0)$、$l_2: -4x+2y+1=0$和$l_3: x+y-1=0$且l_1与l_2的距离是$\frac{7}{10}\sqrt{5}$．

（Ⅰ）求 a 的值；

（Ⅱ）已知 P 点到直线l_2的距离与 P 点到直线l_3的距离之比是$\sqrt{2}:\sqrt{5}$，试求出点 P 的轨迹方程．

考点 4：对称问题

例 1.点$A(-1,0)$关于直线$l: y=kx(k\neq 0)$的对称点的坐标为_________．

例 2.求与直线$2x+y-4=0$关于直线$x-y+1=0$对称的直线的方程．

例 3.圆$x^2+y^2-2x-1=0$关于直线$2x-y+3=0$对称的圆的方程是

A．$(x+3)^2+(y-2)^2=\frac{1}{2}$　　B．$(x-3)^2+(y+2)^2=\frac{1}{2}$

C．$(x+3)^2+(y-2)^2=2$　　D．$(x-3)^2+(y+2)^2=2$

考点 5：直线系

例.（2021 北京二中高一期末）设直线系$M: xcos\theta+(y-2)sin\theta=1(0\le\theta\le2\pi)$，对于下列命题：

（1）M中所有直线均经过一个定点；

（2）存在定点P不在M中的任一条直线上；

（3）对于任意整数$n(n\ge3)$，存在正n边形，其所有边均在M中的直线上；

（4）M中的直线所能围成的正三角形面积都相等.

真命题有________________.

1.4.2　圆与方程

考点 1：圆的方程

例 1.（2020 北京）某已知半径为1的圆经过点$(3,4)$，则其圆心到原点的距离的最小值为

A.4　　B.5　　C.6　　D.7

例 2.求经过$A(4,2),B(-1,3)$两点，且在两坐标轴上的四个截距之和是 2 的圆的方程

例 3.已知圆 C 的圆心是直线$x-y+1=0$与 x 轴的交点，且圆 C 与直线$x+y+3=0$相切，则圆 C 的方程为______________.

例 4.已知圆$x^2+y^2-2x+my=0$上任意一点 M 关于直线$x+y=0$的对称点 N 也在圆上，则 m 为

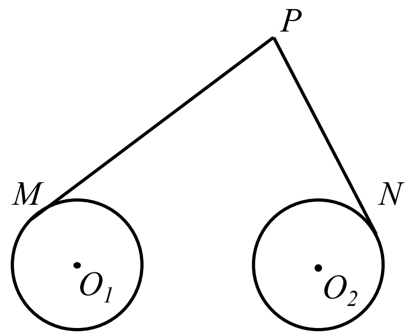
A．2　B．-2　C．1　D．-1

例 5.在平面直角坐标系内，若曲线$C: x^2+y^2+2ax-4ay+5a^2-4=0$上所有的点均在第二象限内，则实数 a 的取值范围为

A．$(-\infty,-2)$　B．$(-\infty,-1)$　C．$(1,+\infty)$　D．$(2,+\infty)$

例 6.一圆过点$P(2,-1)$且和直线$x-y-1=0$相切，圆心在直线$y=-2x$上，求此圆的方程.

例 7.如图，圆O_1与圆O_2的半径都是 1，$O_1O_2=4$，过动点 P 分别作圆O_1、圆O_2的切线PM、PN（M、N 分别为切点），使得$PM=\sqrt{2}PN$，试建立适当的坐标系，并求动点 P 的轨迹方程.



例 8.已知点$M(-3,0),N(3,0),B(1,0)$，动圆 C 与直线MN切于点 B，过 M、N 与圆 C 相切的两直线相交于点 P，则 P 点满足的条件是

A．$|PM|-|PN|=2$　　B．$|PM|-|PN|=-2$

C．$|PM|-|PN|=2$或-2　　D．$|PM|-|PN|=1$或-1

考点 2：直线与圆

例 1.（2019 北京文）设抛物线$y^2=4x$的焦点为F，准线为l．则以F为圆心，且与l相切的圆的方程为.

例 2.（2021 北京）已知圆$C: x^2+y^2=4$，直线$l: y=kx+m$，则当k的值发生变化时，直线截得圆C弦长的最小值为 2，则m的取值为

A.± 2　　B.$\pm\sqrt{2}$　　C.$\pm\sqrt{3}$　　D.± 3

例 3.已知圆 C 过点$(1,0)$，且圆心在 x 轴的正半轴上，直线$l: y=x-1$被该圆所截得的弦长为$2\sqrt{2}$，则圆 C 的标准方程为___________.

例 4.圆$x^2+y^2=1$与直线$y=kx+2$没有公共点的充要条件是

A．$k\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$　　B．$k\in(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$

C．$k\in(-\sqrt{3},\sqrt{3})$　　D．$k\in(-\infty,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},+\infty)$

例 5.直线$y=kx+3$与圆$(x-3)^2+(y-2)^2=4$相交于 M，N 两点，若$|MN|\geq 2\sqrt{3}$，则 k 的取值范围

A．$[-\frac{3}{4},0]$　　B．$(-\infty,-\frac{3}{4}]\cup[0,+\infty)$　　C．$[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}]$　　D．$[-\frac{2}{3},0]$

例 6.若$\odot O_1: x^2+y^2=5$与$\odot O_2: (x-m)^3+y^2=20(m\in R)$相交于 A、B 两点，且两圆在点 A 处的切线互相垂直，则线段AB的长度是_________.

例 7.在平面直角坐标系xOy中，圆 C 的方程为$x^2+y^2-8x+15=0$，若直线$y=kx-2$上至少存在一点，使得以该点为圆心，1 为半径的圆与圆 C 有公共点，则 k 的最大值是______________.

例 8.已知圆$M: (x+cos\,\theta)^2+(y-sin\,\theta)^2=1$，直线$l: y=kx$，下面四个命题

A．对任意实数 k 和θ，直线 l 和圆 M 相切；

B．对任意实数 k 和θ，直线 l 和圆 M 有公共点；

C．对任意实数θ，必存在实数 k，使得直线 l 和圆 M 相切；

D．为任意实数 k，必存在实数θ，使得直线 l 和圆 M 相切.

其中真命题的代号是_______________.（写出所有真命题的代号）.

例 9.已知圆$C: (x-2)^2+y^2=1$，点 P 在直线．$l: x+y+1=0$上，若过点 P 引圆的切线，切线长的取值范围是_________；若过点 P 存在圆的割线 m 与圆 C 交于 A、B 两点，且$\frac{PB}{PA}=2$，则点 P 横坐标x_0的取值范围是_________.

例 10.在平面直角坐标系xOy中，O 为坐标原点，动点 P 与两个定点$M(1,0), N(4,0)$的距离之比为$\frac{1}{2}$.

（Ⅰ）求动点 P 的轨迹 W 的方程；

（Ⅱ）若直线$l: y=kx+3$与曲线 W 交于 A，B 两点，在曲线 W 上是否存在一点 Q，使得$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，若存在，求出此时直线 l 的斜率；若不存在，说明理由.

例 11.已知$m\in\boldsymbol{R}$，直线$mx-(m^2+1)y=4m$和圆$C: x^2+y^2-8x+4y+16=0$.

（Ⅰ）求直线 l 斜率的取值范围；

（Ⅱ）直线 l 能否将圆 C 分割成弧长的比值为$\frac{1}{2}$的两段圆弧？为什么？

1.4.3 圆锥曲线与方程

考点 1：椭圆

例 1.根据下列条件求椭圆的标准方程

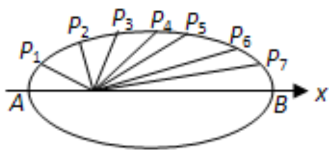
（1）两个焦点的坐标分别是$(-4,0)$、$(4,0)$，椭圆上一点 P 到两焦点距离的和等于 10；

（2）两个焦点的坐标分别是$(0,-2)$、$(0,2)$，并且椭圆经过点$(-\frac{3}{2},\frac{5}{2})$；

（3）椭圆经过两点$(-\frac{3}{2},\frac{5}{2})$，$(\sqrt{3},\sqrt{5})$；

（4）离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$且过点$(2,0)$；

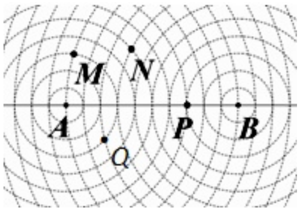
例 2.如图，把椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$的长轴$AB$分成 8 等份，过每个分点作 x 轴的垂线交椭圆的上半部分于$P_1,P_2,P_3,P_4,P_5,P_6,P_7$七个点，$F$ 是椭圆的一个焦点，则$|P_1F|+|P_2F|+|P_3F|+|P_4F|+|P_5F|+|P_6F|+|P_7F=$________.



例 3.设F_1,F_2是椭圆E:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点，$P$ 为直线$x=\frac{3a}{2}$上一点，$\triangle F_2PF_1$是底角为$30°$的等腰三角形，则 E 的离心率为（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{2}{3}$　　C．$\frac{3}{4}$　　D．$\frac{4}{5}$

例 4.如图，已知$|AB|=10$，图中的一系列圆是圆心分别为 A，B 的两组同心圆，每组同心圆的半径分别是 1，2，3，…，n，…．利用这两组同心圆可以画出以 A，B 为焦点的椭圆，设其中经过点 M，N，P 的椭圆的离心率分别是e_M,e_N,e_P，则（　　）



A．$e_M=e_N=e_P$　　B．$e_P<e_M=e_N$　　C．$e_M<e_N<e_P$　　D．$e_P<e_M<e_N$

例 5.（2011 北京理）曲线 C 是平面内与两个定点$F_1(-1,0)$和$F_2(1,0)$的距离的积等于常数$a^2(a>1)$的点的轨迹．给出下列三个结论：①曲线C过坐标原点；②曲线C关于坐标原点对称；③若点P在曲线C上，则$\triangle F_1PF_2$的面积不大于$\frac{1}{2}a^2$．其中，所有正确结论的序号是________.

例 6.椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的两个焦点$F_1,F_2$，点 P 在椭圆 C 上，且$PF_1\perp F_1F_2$，$|PF_1|=\frac{4}{3}$，$|PF_2|=\frac{14}{3}$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）若直线 l 过圆$x^2+y^2+4x-2y=0$的圆心 M 交椭圆于 A、B 两点，且 A、B 关于点 M 对称，求直线 L 的方程.

例 6.已知菱形$ABCD$的顶点 A，C 在椭圆$x^2+3y^2=4$上，对角线BD所在直线的斜率为 1.

（Ⅰ）当直线BD过点$(0,1)$时，求直线AC的方程；

（Ⅱ）当$\angle ABC=60°$，求菱形$ABCD$面积的最大值.

考点 2：双曲线

例 1.（2016 北京理）双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的渐近线为正方形 $OABC$ 的边 OA，OC 所在的直线，点 B 为该双曲线的焦点．若正方形 $OABC$ 的边长为 2，则 a＝________.

例 2（2015 北京理）已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-y^2=1$（$a>0$）的一条渐近线为$\sqrt{3}x+y=0$，则 a＝________.

例 3.（2014 北京理）设双曲线 C 经过点（2，2），且与$\frac{y^2}{4}-x^2=1$ 具有相同渐近线，则 C 的方程为________；渐近线方程为________.

例 4.（2018 北京理）已知椭圆 M:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$），双曲线 N:$\frac{x^2}{m^2}-\frac{y^2}{n^2}=1$．若双曲线$N$的两条渐近线与椭圆$M$的四个交点及椭圆$M$的两个焦点恰为一个正六边形的顶点，则椭圆$M$的离心率为____；双曲线$N$的离心率为__________.

例 5.（2021 人大附中开学考）已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的左顶点为$A$，右焦点为$F$，动点$B$在$C$上．当$BF\perp AF$时，$|AF|=|BF|$．则$C$的离心率为__________.

例 6.已知F_1,F_2是椭圆和双曲线的公共焦点，P 是他们的一个公共点，且$\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{3}$，则椭圆和双曲线的离心率的倒数之和的最大值为____________.

例 7.（2021 八省联考）

双曲线C:$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a,b>0$）的左顶点为$A$，右焦点为$F$，动点$B$在$C$上.当$BF\perp AF$时，$|AF|=|BF|$.

（Ⅰ）求C的离心率;

（Ⅱ）若B在第一象限，证明：$\angle BFA=2\angle BAF$.

考点 3：抛物线

例 1.（2020 北京）设抛物线的顶点为O，焦点为F，准线为l．P是抛物线上异于O的一点，过P作$PQ\perp l$于Q，则线段FQ的垂直平分线

A．经过点O　　B．经过点P　　C．平行于直线OP　　D．垂直于直线OP

例 2.（2021 人大附中开学考）已知点$M(-1,0)$，点N在直线$y=x+3$上，若过点M,N且与直线$x=1$相切的圆有且仅有1个，则点N的坐标为______________.

例 3.（2019 北京理）

已知抛物线C：$x^2=-2py$经过点$(2,-1)$.

（Ⅰ）求抛物线C的方程及其准线方程；

（Ⅱ）设O为原点，过抛物线C的焦点作斜率不为0的直线l交抛物线C于两点M,N，直线$y=-1$分别交直线OM，ON于点A和点B．求证：以AB为直径的圆经过y轴上的两个定点.

§2　解析几何小题

【模块解读】

从近年的模拟题和高考题来看，解析几何的小题大致分为三类考向：

第一类是基本概念的应用及拓展，即圆锥曲线的定义、基本参数、常用性质，包括定义拓展（如 2011 年理科卷考到了卡西尼卵形线），这类试题一般要求学生通过课内学习的逻辑和入手角度，对常规的、新的场景进行朴素的解读，难点在新场景的陌生感导致遗忘了基本思路.

第二类是基本公式及运算，此类题是解析几何小题中比较常见的，通过某个基本参数的定义和运算公式，直接求得答案，如给定离心率和部分参数求曲线方程等，此类简单题一般在前几题的位置，属于必拿分的试题；同时，也可能结合数学文化背景出一些难度稍大的压轴小题.

第三类是几何特征的应用，此类题也是解析几何小题中比较常见的一类试题，其难点在于在将高中所学曲线的定义及性质等与平面几何图形的几何特征相结合，通常也能用解析几何最常规也是最粗暴的算法直接求出，但是显然结合几何特征会使运算律大幅减少.

在本模块中，我们将**首先**从平面几何图形的性质进行回顾，所选的知识大部分是初中所学过的内容，强调几何图形的辨识，更多条件转化的内容会在大题的部分提到；**其次**以 2020 和 2021 两年的北京各区新高考改革下的模拟试题进行以上三类考向的分类突破，熟悉略高于高考题的考法；**之后**以近年北京卷涉及到的真题部分进行集中练习，起到感知高考题难度的效果.

2.1　平面几何图形

【知识汇编】

一、三角形

1.坐标系内任意三点构成的三角形

（1）面积公式：对于由平面直角坐标系内$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3)$三点构成的三角形

其面积为：$S_\triangle ABC=\frac{1}{2}|(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)-(x_1y_3+x_2y_1+x_3y_2)|=\left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1&1&1\\x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\end{vmatrix}\right|$.

特别地，对于过原点O的三角形面积为$S_\triangle ABO=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|=\left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1&x_2\\y_1&y_2\end{vmatrix}\right|$.

（2）在三角形中找特殊的点和线的角度：对称、三角函数.

2.圆中的三角形

（1）一边为直径的三角形为直角三角形，如图 1

①三角形面积可以直接用$|AC|\cdot|CB|$来表示，周长可以用$|AC|+|CB|+2r$来表示.

②在§1 中，我们提到可以用A、B、C三点的坐标建立直径式方程来确定该圆.

（2）由圆上任意三点构成的三角形，如图 2

通过连接圆心和三角形的顶点得到三个等腰三角形，作中垂线可以得到三线合一.

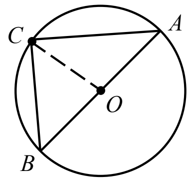


图1

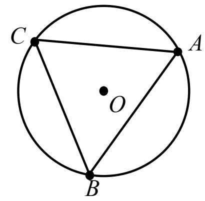
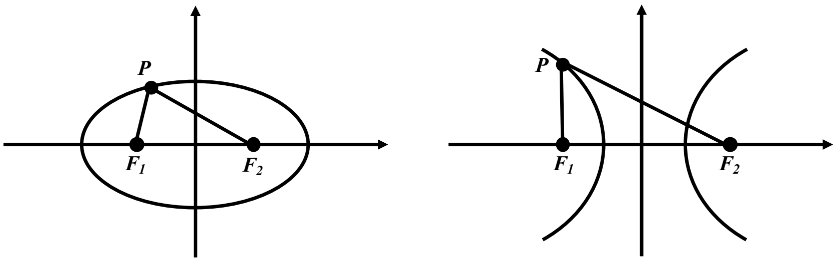


图2

3.圆锥曲线中的三角形

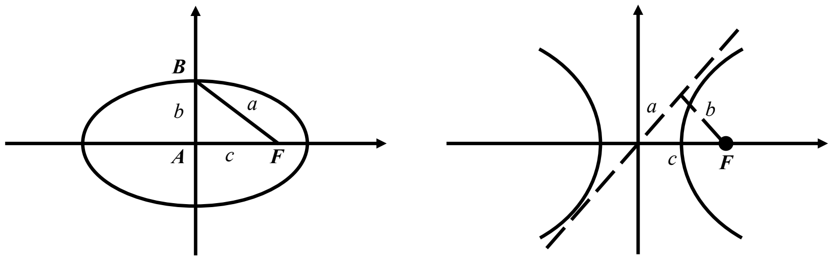
（1）椭圆、双曲线的焦点三角形（第一定义）



①面积：$\begin{cases}\text{椭圆：}S_{\Delta F_1PF_2}=b^2\tan\frac{\theta}{2}\\ \text{双曲线：}S_{\Delta F_1PF_2}=\frac{b^2}{\tan\frac{\theta}{2}}=b^2\cot\frac{\theta}{2}\end{cases}$

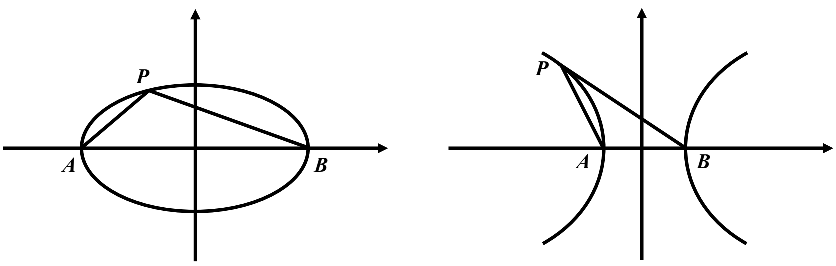
②通常可以通过焦点三角形转化所求边（结合第一定义）.

（2）椭圆、双曲线的特征三角形



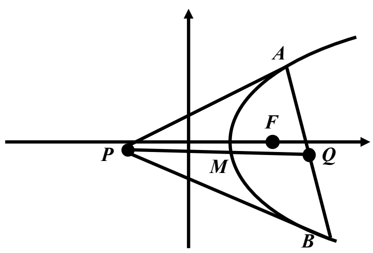
如图所示的两个三角形中可以找出椭圆方程中的三个基本参数.

（3）椭圆、双曲线的顶点三角形（第三定义）



（4）阿基米德三角形

如图，以F为焦点的抛物线$y^2=2px(p>0)$在点A、B处的切线相交于点P，则ΔPAB就是阿基米德三角形，且称弦AB为阿基米德三角形的底边．$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3),P(x_0,y_0)$



①AB是切点弦，可以结合极点极线的内容进行处理.

P为定点，则AB的方程为$y_0y=p(x+x_0)$；AB过定点C，则点P在定直线$y_0y=p(x+x_0)$上；特殊地，若底边 AB 过的定点是焦点$(\frac{p}{2},0)$，则点 P 在准线$x=-\frac{p}{2}$上.

②点 P 的坐标为$(\frac{y_1y_2}{2p},\frac{y_1+y_2}{2})$.（如果焦点在$y$轴则坐标为$(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{x_1x_2}{2p})$）

③阿基米德三角形的底边中线平行于x轴，底边AB的中点为Q，则$PQ \parallel x$轴.

④设PQ与抛物线交于点M，则M是线段PQ的中点.

⑤过点M作抛物线的切线，则此切线和底边AB平行.

二、四边形

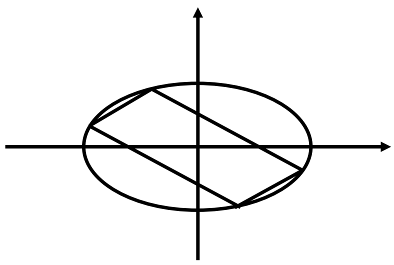
（1）坐标系内任意四点构成的四边形

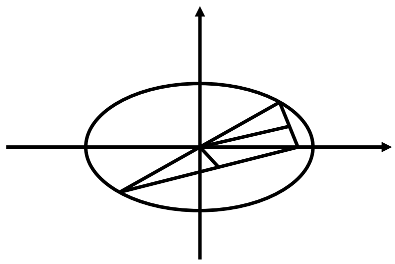
周长可以通过两点间距离公式求，面积可以通过将四边形分割为两个三角形来求解.

（2）平行四边形

①性质：对边平行且相等、对角线相互平分.

②特殊化：椭圆中的平行四边形.

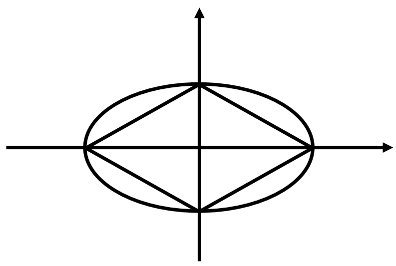




③长方形：平行四边形+一个角为直角.

正方形：长方形+四边相等.

④菱形：过原点做垂直的直线，交椭圆于四个点，为菱形的顶点.



三、圆

1.平面几何中的圆

（1）垂径定理

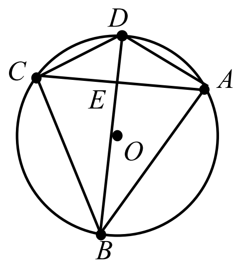
①垂直于弦的直径平分这条弦，并且平分弦所对的两条弧. 关于垂径定理的计算常与勾股定理相结合，解题时往往需要添加辅助线，一般过圆心作弦的垂线，构造直角三角形.

②推论：平分弦（不是直径）的直径垂直于弦，并且平分弦所对的两条弧；

弦的垂直平分线经过圆心，并且平分弦所对的两条弧.

（2）*托勒密定理：圆的内接四边形中，两对角线所包矩形的面积等于一组对边所包矩形的面积与另一组对边所包矩形的面积之和.

如图有A、B、C、D四点共圆，$ABCD$是圆O的一个内接凸四边形，则：$|AB|\times|CD|=|AC|\times|BD|$.



（3）三角形与圆

①三角形的外接圆：经过三角形各顶点的圆叫做三角形的外接圆，圆心叫做三角形的外心，这个三角形叫做圆的内接三角形．外心是三角形三条垂直平分线的交点，它到三角形的三个顶点的距离相等．

②三角形的内切圆：与三角形各边都相切的圆叫做三角形的内切圆，内切圆的圆心叫做三角形的内心，这个三角形叫做圆的外切三角形．内心是三角形三条角平分线的交点，它到三角形的三条边的距离相等．

2.解析几何中的特殊圆

（1）阿波罗尼斯圆：一般地，平面内到两个定点距离之比为常数$\lambda(\lambda > 0\ ,\ \lambda \neq 1)$的点的轨迹是圆，此圆被叫做“阿波罗尼斯圆”．特殊地，当$\lambda = 1$时，点P的轨迹是线段AB的中垂线．

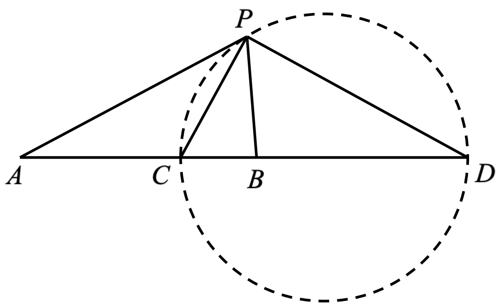
如图：

A、C、B、D为调和点列；

PC、PD分别为$\angle APB$的内、外角平分线；

$PC \perp PD$；

以上三个条件中，知道任意两个都可以推得第三个！



（2）蒙日圆：在椭圆（双曲线）中，任意两条互相垂直的切线的交点都在同一个圆上，它的圆心是椭圆（双曲线）的中心，半径等于长半轴（实半轴）与短半轴（虚半轴）平方和（差）的算术平方根，这个圆叫蒙日圆.

对于椭圆：$C\colon\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$，蒙日圆为：$x^2 + y^2 = a^2 + b^2$.

对于双曲线：$C\colon\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$，蒙日圆为：$x^2 + y^2 = a^2 - b^2$.

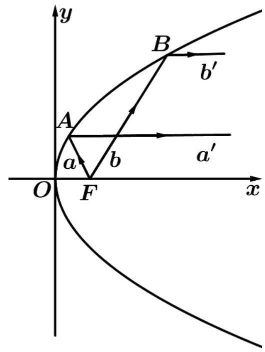
对于抛物线，为其准线.

2.2　解析几何小题（模拟）

考点 1：基本概念的应用及拓展

例 1.(2021 东城一模)已知椭圆C_1:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点$F$与抛物线$C_2$:$y^2=2px(p>0)$的焦点重合，$P$为椭圆$C_1$与抛物线$C_2$的公共点，且$PF\perp x$轴，那么椭圆$C_1$的离心率为

A．$\sqrt{2}-1$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D．$\sqrt{3}-1$



例 2.(2021 西城一模)抛物线具有以下光学性质：从焦点出发的光线经抛物线反射后平行于抛物线的对称轴．该性质在实际生产中应用非常广泛．如图，从抛物线$y^2=4x$的焦点F发出的两条光线a,b分别经抛物线上的A,B两点反射，已知两条入射光线与x轴所成锐角均为$60°$，则两条反射光线a'和b'之间的距离为

A．$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　B．$\frac{8}{3}$　　C．$\frac{4\sqrt{3}}{3}$　　D．$\frac{8\sqrt{3}}{3}$

例 3.(2021 朝阳一模)已知抛物线C:$y^2=4x$的焦点为F，准线为l，点P是直线l上的动点．若点A在抛物线C上，且$|AF|=5$，则$|PA|+|PO|$（O为坐标原点）的最小值为

A．8　　B．$2\sqrt{13}$　　C．$\sqrt{41}$　　D．6

例 4.(2021 丰台一模)P为抛物线$y^2=2px(p>0)$上一点,点P到抛物线准线和对称轴的距离为 10 和 6,则$p=$

A．2　　B．4　　C．4或9　　D．2或18

例 5.(2021 石景山一模)过抛物线$y^2=4x$焦点F的直线交抛物线于A,B两点,若F是线段AB的中点,则$|AB|=$

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

例 6.(2021 通州一模)已知点P是抛物线$y^2=2px(p>0)$上一点，且点P到点$A(0,-2)$的距离与到y轴的距离之和的最小值为$2\sqrt{3}-2\sqrt{2}$，则$p=$

A．$2\sqrt{2}$　　B．4　　C．$3\sqrt{2}$　　D．$4\sqrt{2}$

例 7.(2021 房山一模)已知双曲线C:$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的离心率为$\sqrt{3}$，则点$M(3,0)$到双曲线$C$的渐近线的距离为

A．2　　B．$\sqrt{6}$　　C．$\frac{3\sqrt{3}}{2}$　　D．$2\sqrt{2}$

例 8.(2021 怀柔一模)曲线$\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{3}=1$与曲线$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{5}=1$的

A．焦距相等　　B．实半轴长相等　　C．虚半轴长相等　　D．离心率相等

例 9.(2021 海淀二模)已知F为抛物线$y^2=4x$的焦点，$P(x_0,y_0)$是该抛物线上的一点.若$|PF|>2$，则

A．$x_0\in(0,1)$　　B．$x_0\in(1,+\infty)$　　C．$y_0\in(2,+\infty)$　　D．$y_0\in(-\infty,2)$

例 10.(2021 房山二模)设F_1,F_2是双曲线C:$\frac{x^2}{3}-y^2=1$的两个焦点，O为坐标原点，点P在双曲线C上，且$|OP|=|OF_1|$.则$\triangle PF_1F_2$的面积为

A．$\frac{5}{2}$　　B．2　　C．$\frac{3}{2}$　　D．1

例11.(2020东城一模)设O为坐标原点，点$A(1,0)$，动点P在抛物线$y^2=2x$上，且位于第一象限，M是线段PA的中点，则直线OM的斜率的范围为

A．$(0,1]$　　B．$(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$　　C．$(0,\frac{\sqrt{2}}{2}]$　　D．$[\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty)$

例12.(2020西城一模)设$A(2,-1),B(4,1)$，则以线段AB为直径的圆的方程是

A．$(x-3)^2+y^2=2$　　B．$(x-3)^2+y^2=8$

C．$(x+3)^2+y^2=2$　　D．$(x+3)^2+y^2=8$

例13.(2020朝阳一模)已知抛物线C：$y^2=2px(p>0)$的焦点为F，准线为l，点A是抛物线C上一点，$AD\perp l$于D.若$AF=4$，$\angle DAF=60°$，则抛物线C的方程为

A．$y^2=8x$　　B．$y^2=4x$　　C．$y^2=2x$　　D．$y^2=x$

例14.(2020丰台一模)过抛物线$C:y^2=2px$（$p>0$）的焦点F作倾斜角为$60°$的直线与抛物线C交于两个不同的点A,B（点A在x轴上方），则$\frac{|AF|}{|BF|}$的值为

A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{4}{3}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．3

例15.(2020通州一模)若抛物线$y^2=2px$的焦点与双曲线$\frac{x^2}{3}-y^2=1$的右焦点重合，则p的值为

A．4　　B．2　　C．$\sqrt{2}$　　D．$2\sqrt{2}$

例16.(2020大兴一模)若抛物线$y^2=4x$上一点M到其焦点的距离等于2，则M到其顶点O的距离等于

A．$\sqrt{3}$　　B．2　　C．$\sqrt{5}$　　D．3

例17.(2020怀柔一模)已知圆C与圆$(x-1)^2+y^2=1$关于原点对称，则圆C的方程为

A．$x^2+y^2=1$　　B．$x^2+(y+1)^2=1$　　C．$x^2+(y-1)^2=1$　　D．$(x+1)^2+y^2=1$

例18.(2020平谷一模)设直线l过点$A(0,-1)$，且与圆C：$x^2+y^2-2y=0$相切于点B，那么$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$

A．± 3　　B．3　　C．$\sqrt{3}$　　D．1

例19.(2020密云一模)如果直线$ax+by=1$与圆$C:x^2+y^2=1$相交，则点$M(a,b)$与圆C的位置关系是

A．点M在圆C上　　B．点M在圆C外　　C．点M在圆C内　　D．上述三种情况都有可能

例20.(2020延庆一模)已知双曲线C：$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$的右焦点为$F$，过原点$O$的直线与双曲线$C$交于$A,B$两点，且$\angle AFB=60°$，则$\triangle BOF$的面积为

A．$\frac{3\sqrt{3}}{2}$　　B．$\frac{9\sqrt{3}}{2}$　　C．$\frac{3}{2}$　　D．$\frac{9}{2}$

例21.(2020海淀二模)若抛物线$y^2=12x$的焦点为F，点P在此抛物线上且横坐标为3，则$|PF|$等于

A．4　　B．6　　C．8　　D．10

例22.(2020朝阳二模)圆心在直线$x-y=0$上且与y轴相切于点$(0,1)$的圆的方程是

A．$(x-1)^2+(y-1)^2=1$　　B．$(x+1)^2+(y+1)^2=1$

C．$(x-1)^2+(y-1)^2=2$　　D．$(x+1)^2+(y+1)^2=2$

例23.(2020顺义二模)抛物线$y^2=4x$上的点与其焦点的距离的最小值为

A．4　　B．2　　C．1　　D．$\frac{1}{2}$

例 24.(2020 丰台二模)已知抛物线 M：$x^2=2py(p>0)$的焦点与双曲线 N：$\frac{y^2}{3}-x^2=1$的一个焦点重合，则$p=$

A．$\sqrt{2}$　　B．2　　C．$2\sqrt{2}$　　D．4

例 25.(2020 平谷二模)若抛物线$y^2=2px(p>0)$上任意一点到焦点的距离恒大于1，则p的取值范围是

A.$p<1$　　B.$p>1$　　C.$p<2$　　D.$p>2$

例 26.(2021 房山一模)抛物线$C: y^2=8x$的焦点为F，则点F的坐标为___________，若抛物线上一点A到y轴的距离为2，则$|AF|=$___________.

例 27.(2021 东城一模)已知抛物线$C: y^2=2px(p>0)$过点$M(4,4)$，那么抛物线C的准线方程为__________，设N为平面直角坐标系xOy内一点，若线段MN的垂直平分线过抛物线C的焦点F，那么线段FN的长度为________.

例 28.(2020 朝阳二模)已知双曲线C的焦点为$F_1(0,2)$，$F_2(0,-2)$，实轴长为 2，则双曲线C的离心率是______；若点Q是双曲线C的渐近线上一点，且$F_1Q\perp F_2Q$，则$\triangle QF_1F_2$的面积为______.

例 29.(2020 房山二模)已知抛物线C：$y^2=2x$的焦点为F，点M在抛物线C上，$|MF|=1$，则点M的横坐标是________，$\triangle MOF$（O为坐标原点）的面积为_________.

例 30.(2021 顺义二模)曲线 C 是平面内与两个定点$F_1(0,1), F_2(0,-1)$的距离的积等于$\frac{3}{2}$的点 P 的轨迹，给出下列四个结论：①曲线 C 关于坐标轴对称；②$\triangle F_1PF_2$周长的最小值为$2+\sqrt{6}$；③点 P 到 y 轴距离的最大值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$；④点 P 到原点距离的最小值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$．其中所有正确结论的序号是__________.

【题源】(2011 北京理)曲线C是平面内与两个定点$F_1(-1,0), F_2(1,0)$的距离的积等于常数$a^2(a>1)$的点的轨迹．给出下列三个结论：①曲线 C 过坐标原点；②曲线 C 关于坐标原点对称；③若点 P 在曲线 C 上，则$\triangle F_1PF_2$的面积不大于$\frac{1}{2}a^2$．其中，所有正确结论的序号是__________.

例 31.(2021 平谷二模)若抛物线$y^2=4x$上一点M到焦点的距离为 3，则点M到y轴的距离为________.

例 32.(2021 西城二模)对于抛物线C，给出下列三个条件：①对称轴为y轴；②过点$(1,1)$；③焦点到准线的距离为2.写出符合其中两个条件的一个抛物线C的标准方程___________.

例 33.(2021 丰台二模)已知点$P(x_0,y_0)$为抛物线$C: x^2=4y$上的点，且点 P 到抛物线 C 焦点的距离为 3，则$|x_0|=$_________.

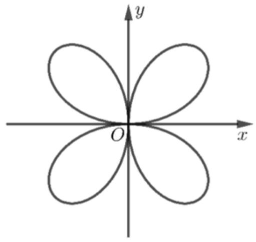
例 34.(2021 房山二模)若三个点$M(3,2\sqrt{6}), N(2,2\sqrt{3}), Q(3,-2\sqrt{6})$中恰有两个点在抛物线$y^2=2px$上，则该抛物线的方程为___________.

例 35.(2021 房山二模)设$m\in\boldsymbol{R}$，过定点 M 的直线$l_1: x+my-3m-1=0$与过定点 N 的直线$l_2: mx-y-3m+1=0$相交于点 P，线段 AB 是圆$C:(x+1)^2+(y+1)^2=4$的一条动弦，且$|AB|=2\sqrt{2}$，给出下列四个结论：①l_1一定垂直l_2；②$|PM|+|PN|$的最大值为 4；③点 P 的轨迹方程为$(x-2)^2+(y-2)^2=1$④$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|$的最小值为$4\sqrt{2}$其中所有正确结论的序号是__________.

例 36.(2020 东城一模)圆心在x轴上，且与直线$l_1: y=x$和$l_2: y=x-2$都相切的圆的方程为______.

例 37.(2020 海淀一模)已知点 $P(1,2)$在抛物线 $C: y^2=2px$上，则抛物线C的准线方程为_______.

例 38.(2020 朝阳一模)数学中有许多寓意美好的曲线，曲线$C:(x^2+y^2)^3=4x^2y^2$被称为“四叶玫瑰线”（如图所示）.给出下列三个结论：①曲线C关于直线$y=x$对称；②曲线C上任意一点到原点的距离都不超过1；③存在一个以原点为中心、边长为$\sqrt{2}$的正方形，使得曲线C在此正方形区域内（含边界）.



其中，正确结论的序号是________.

例 39.(2020 石景山一模)已知F是抛物线C：$y^2=4x$的焦点，M是C上一点，FM的延长线交y轴于点N.若M为FN的中点，则$|FN|=$______.

例 40.(2020 大兴一模)在直角坐标系xOy中，双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0,b>0$）的离心率$e>2$，其渐近线与圆$x^2+(y-2)^2=4$交$x$轴上方于$A,B$两点，有下列三个结论：

①$|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|<|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|$；②$|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|$存在最大值；③$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|>6$.

则正确结论的序号为_______.

例 41.(2020 顺义二模)曲线C是平面内到定点$F(\frac{3}{2},0)$和定直线l：$x=-\frac{3}{2}$的距离之和等于 5 的点的轨迹，给出下列三个结论：①曲线C关于y轴对称；②若点$P(x,y)$在曲线C上，则y满足$|y|\le 4$；③若点$P(x,y)$在曲线C上，则$1\le|PF|\le 5$.

其中，正确结论的序号是________.

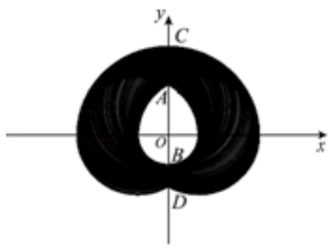
例 42.(2020 丰台二模)已知集合$P=\{(x,y)|(x-cos\,\theta)^2+(y-sin\,\theta)^2=4,0\le\theta\le\pi\}$.由集合 P 中所有的点组成的图形如图中阴影部分所示，中间白色部分形如美丽的“水滴”.给出下列结论：

①“水滴”图形与 y 轴相交，最高点记为 A，则点 A 的坐标为(0,1)；

②在集合 P 中任取一点 M，则 M 到原点的距离的最大值为 3；

③阴影部分与 y 轴相交，最高点和最低点分别记为 C，D，则$|CD|=3+\sqrt{3}$；

④白色“水滴”图形的面积是$\frac{11}{6}\pi-\sqrt{3}$.



其中正确的有___________.

考点 2：基本公式及运算

例 1.(2021 朝阳一模)已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的离心率为$2$，则双曲线$C$的渐近线方程为

A．$y=\pm\sqrt{3}x$　　B．$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$　　C．$y=\pm\frac{1}{2}x$　　D．$y=\pm 2x$

例 2.(2021 丰台一模)已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-y^2=1(a>0)$的离心率是$\frac{\sqrt{5}}{2}$，则$a=$

A．$\sqrt{2}$　　B．2　　C．$2\sqrt{2}$　　D．4

例 3.(2021 怀柔一模)“$a=0$”是直线$(a+1)x+(a-1)y+2a=0(a\in R)$与圆$x^2+y^2=4$相交的

A．充分而不必要条件　B．必要而不充分条件　C．充分必要条件　D．即不充分也不必要条件

例 4.(2021 东城二模)已知双曲线$C:mx^2-ny^2=1(mn>0)$，那么“双曲线C的渐近线为$y=\pm 2x$”是“$m=4n$”的

A．充分而不必要条件　B．必要而不充分条件　C．充分必要条件　D．既不充分也不必要条件

例 5.(2021 西城二模)若直线$y=2x$与双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$无公共点，则双曲线$C$的离心率可能是

A．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．1　　C．2　　D．$2\sqrt{3}$

例 6.(2021 朝阳二模)已知双曲线$C:x^2-\frac{y^2}{b^2}=1$的一个焦点为$(-2,0)$，则双曲线C的一条渐近线方程为

A．$\sqrt{3}x+y=0$　　B．$\sqrt{3}x+y=0$　　C．$x+\sqrt{3}y-1=0$　D．$\sqrt{3}x+y-1=0$

例 7.(2021 朝阳二模)若圆$O:x^2+y^2=1$上存在点P，直线$l:y=k(x+2)$上存在点Q，使得$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{QO}$，实数$k$的取值范围为

A．$[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$　　B．$[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}]$　　C．$\{-\sqrt{3},\sqrt{3}\}$　　D．$\{-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\}$

例 8.(2021 丰台二模)已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-y^2=1(a>0)$的渐近线与圆$x^2+y^2-4y+3=0$相切，则$a=$

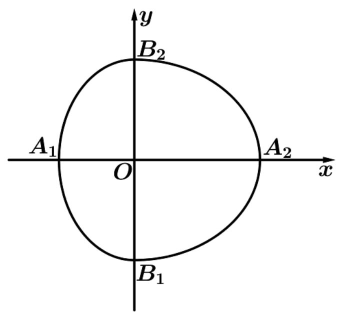
A．3　　B．$\sqrt{3}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D．$\frac{1}{3}$

例 9.(2021 丰台二模)如图，半椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(x\ge 0)$与半椭圆$\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2}{c^2}=1(x\le 0)$组成的曲线称为“果圆”，其中$a^2=b^2+c^2,a>0,b>c>0.A_1,A_2$和$B_1,B_2$分别是“果圆”与 x 轴，y 轴的交点.下列三个结论：

①$\sqrt{2}c<a<\sqrt{2}b$；

②若$|A_1A_2|=|B_1B_2|$，则$a:b:c=5:4:3$；

③若在“果圆”y 轴右侧部分上存在点 P，使用$\angle A_1PA_2=90°$，则$\frac{1}{2}<\frac{c}{a}<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.



其中，所有正确结论的序号是

A．①②　　B．①③

C．②③　　D．①②③

例 10.(2021 门头沟二模)已知抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点为F，过F且斜率为$\sqrt{3}$的直线与抛物线 C 上相交于P,Q两点，且P,Q两点在准线上的投影分别为M,N两点，则$\triangle FMN$的面积为

A．$\frac{8}{3}p^2$　　B．$\frac{8\sqrt{3}}{3}p^2$　　C．$\frac{4\sqrt{3}}{3}p^2$　　D．$\frac{2\sqrt{3}}{3}p^2$

例 11.(2021 昌平二模)已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的离心率为$\sqrt{2}$，则其渐近线方程为

A．$y=\pm x$　　B．$y=\pm\sqrt{2}x$　　C．$y=\pm\sqrt{3}x$　　D．$y=\pm 2x$

例 12.(2020 东城一模)若双曲线$C: x^2-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$的一条渐近线与直线$y=2x+1$平行，则$b$的值为

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．2

例 13.(2020 海淀一模)已知双曲线$x^2-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$的离心率为$\sqrt{5}$,则 b 的值为

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

例 14.(2020 朝阳一模)在$\triangle ABC$中，$AB=BC$，$\angle ABC=120°$.若以A，B为焦点的双曲线经过点C，则该双曲线的离心率为

A．$\frac{\sqrt{5}}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{7}}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$　　D．$\sqrt{3}$

例 15.(2020 丰台一模)圆$(x-1)^2+y^2=2$的圆心到直线$x+y+1=0$的距离为

A．2　　B．$\sqrt{2}$　　C．1　　D．$\frac{\sqrt{2}}{2}$

例 16.(2020 石景山一模)圆$x^2+y^2-2x-8y+13=0$的圆心到直线$ax+y-1=0$的距离为 1，则$a=$

A．$-\frac{4}{3}$　　B．$-\frac{3}{4}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．2

例 17.(2020 平谷一模)双曲线$\frac{x^2}{m}-y^2=1(m>c)$的一条渐近线方程为$x+2y=0$，那么它的离心率为

A．$\sqrt{3}$　　B．$\sqrt{5}$　　C．$\frac{\sqrt{6}}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{5}}{2}$

例 18.(2020 密云一模)已知斜率为k的直线l与抛物线$C: y^2=4x$交于A,B两点，线段AB的中点为$M(1,m)(m>0)$，则斜率k的取值范围是

A．$(-\infty,1)$　　B．$[-\infty,1)$　　C．$(1,+\infty)$　　D．$[1,+\infty)$

例 19.(2020 东城二模)双曲线$C: x^2-\frac{y^2}{b^2}$=1 的渐近线与直线$x=1$交于A,B两点，且$|AB|=4$，那么双曲线C的离心率为

A．$\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．2　　D．$\sqrt{5}$

例 20.(2020 西城二模)抛物线$x^2=4y$的准线方程是

A．$y=1$　　B．$y=-1$　　C．$x=-1$　　D．$x=1$

例 21.(2020 西城二模)若圆$x^2+y^2-4x+2y+a=0$与x轴、y轴均有公共点，则实数a的取值范围是

A．$(-\infty,1]$　　B．$(-\infty,0]$　　C．$[0,+\infty)$　　D．$[5,+\infty)$

例 22.(2020 朝阳二模)直线 l 过抛物线$y^2=2x$的焦点 F，且 l 与该抛物线交于不同的两点$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$．若$x_1+x_2=3$，则弦 AB 的长是

A．4　　B．5　　C．6　　D．8

例 23.(2020 房山二模)若双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的一条渐近线经过点$(1,\sqrt{3})$，则双曲线的离心率为

A．$\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．2　　D．$\sqrt{5}$

例 24.(2021 东城一模)已知双曲线$C: x^2-\frac{y^2}{m}=1$经过点$(\sqrt{2},2)$，那么 m 的值为____，C 的渐近线方程为___.

例 25.(2021 西城一模)已知双曲线$C: \frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{4}=1$，则$C$的渐近线方程是__________；过$C$的左焦点且与$x$轴垂直的直线交其渐近线于$M, N$两点，$O$为坐标原点，则$\triangle OMN$的面积是_________.

例 26.(2021 通州一模)已知F_1, F_2分别为双曲线$C: x^2-\frac{y^2}{3}=1$的左、右焦点，过点F_2作x轴的垂线交双曲线C于P, Q两点，则双曲线C的渐近线方程为____________；$\triangle PF_1Q$的面积为________.

例 27.(2020 怀柔一模)已知抛物线$y^2=2px$ 的焦点与双曲线$\frac{x^2}{4}-y^2=1$的右顶点重合，则抛物线的焦点坐标为__________；准线方程为___________.

例 28.(2020 密云一模)双曲线$y^2-x^2=1$的焦点坐标是_______________，渐近线方程是_______________.

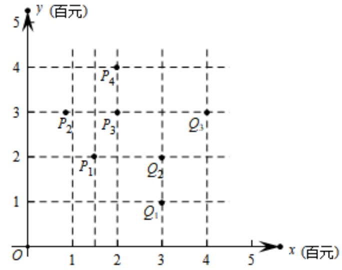
例 29.(2021 海淀一模)设双曲线的两条渐近线互相垂直，则此双曲线的离心率为___________.

例 30.(2021 海淀一模)对平面直角坐标系xOy中的两组点，如果存在一条直线$ax+by+c=0$使这两组点分别位于该直线的两侧，则称该直线为“分类直线”.对于一条分类直线l，记所有的点到l的距离的最小值为d_l，约定：d_l越大，分类直线l的分类效果越好.某学校高三（2）班的 7 位同学在 2020 年期间网购文具的费用x (单位：百元)和网购图书的费用y (单位：百元)的情况如图所示，现将P_1，P_2，P_3和P_4为第I组点.将Q_1，Q_2和Q_3归为第II点.在上述约定下，可得这两组点的分类效果最好的分类直线，记为L.

给出下列四个结论：

①直线$x=2.5$比直线$3x-y-5=0$的分类效果好；②分类直线L的斜率为 2；③该班另一位同学小明的网购文具与网购图书的费用均为 300 元，则小明的这两项网购花销的费用所对应的点与第II组点位于L的同侧；④如果从第I组点中去掉点P_1，第II组点保持不变，则分类效果最好的分类直线不是L.

其中所有正确结论的序号是___________.



例 31.(2021 顺义二模)若双曲线$C: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0, b>0)$的焦距等于实轴长的$\sqrt{3}$倍，$C$ 的渐近线方程为

例 32.(2020 西城一模)设双曲线$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$的一条渐近线方程为$y=\frac{\sqrt{2}}{2}x$，则该双曲线的离心率为

例 33.(2020 海淀一模)已知点 $P(1,2)$在抛物线 $C: y^2=2px$上，则抛物线C的准线方程为_______.

例 34.(2020 房山一模)设抛物线$x^2=2py$经过点$(2,1)$，则抛物线的焦点坐标为_____.

例 35.(2020 通州一模)圆$(x-1)^2+y^2=1$的圆心到直线$x+\sqrt{3}y+1=0$的距离为______.

例 36.(2020 平谷一模)如果抛物线$y^2=2px$上一点$A(4, m)$到准线的距离是 6，那么$m=$______.

例 37.(2020 延庆一模)经过点$M(-2,0)$且与圆$x^2+y^2=1$相切的直线l的方程是____________.

例 38.(2020 西城二模)若双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{16}=1(a>0)$经过点$(2,0)$，则该双曲线渐近线的方程为____.

例 39.(2020 海淀二模)已知双曲线E的一条渐近线方程为$y=x$，且焦距大于 4，则双曲线E的标准方程可以为______.（写出一个即可）

例 40.(2020 丰台二模)已知双曲线$C: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$的离心率为$\sqrt{3}$，则双曲线 C 的渐近线方程

例 41.(2020 房山二模)若直线$x=3$与圆$x^2+y^2-2x-a=0$相切，则$a=$_________.

考点 3：几何特征的应用

例 1.(2021 东城一模)已知圆$x^2+y^2=1$截直线$y=k(x+1)(k>0)$所得弦的长度为1，那么k的值为

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C．1　　D．$\sqrt{3}$

例 2.(2021 海淀一模)已知点$A(x_1,x_1^2)$，$B(x_2,x_2^2)$，$C(0,\frac{1}{4})$，则“$\triangle ABC$是等边三角形”是“直线AB的斜率为 0”

A．充分而不必要条件　B．必要而不充分条件　C．充分必要条件　D．既不充分也不必要条件

例 3.(2021 朝阳一模)已知圆$x^2+y^2=4$截直线$y=kx+2$所得弦的长度为$2\sqrt{3}$，则实数$k=$

A．$\sqrt{2}$　　B．$-\sqrt{3}$　　C．$\pm\sqrt{2}$　　D．$\pm\sqrt{3}$

例 4.(2021 顺义一模)已知圆$(x-a)^2+(y-b)^2=1$经过原点，则圆上的点到直线$y=x+2$距离的最大值

A．$2\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{2}+2$　　C．$\sqrt{2}+1$　　D．$\sqrt{2}$

例 5.(2021 丰台一模)若直线$y=kx+1$是圆$x^2+y^2-2x=0$的一条对称轴，则k的值为

A．$-\frac{1}{2}$　　B．-1　　C．1　　D．2

例 6.(2021 石景山一模)瑞士著名数学家欧拉在 1765 年证明了定理：三角形的外心、重心、垂心位于同一条直线上，这条直线被后人称为三角形的“欧拉线”.在平面直角坐标系中作$\triangle ABC$，$AB=AC=4$，点$B(-1,3)$,点$C(4,-2)$，且其“欧拉线”与圆$M:(x-a)^2+(y-a+3)^2=r^2$相切.则圆M上的点到直线$x-y+3=0$的距离的最小值为

A．$2\sqrt{2}$　　B．$3\sqrt{2}$　　C．$4\sqrt{2}$　　D．6

【拓展】(2020 朝阳保温二)瑞士著名数学家欧拉在 1765 年证明了定理：三角形的外心、重心、垂心位于同一条直线上，这条直线被后人称为三角形的“欧拉线”.在平面直角坐标系中作$\triangle ABC$，$AB=AC=4$，点$B(0,3)$，点$C(4,-1)$，且$\triangle ABC$的“欧拉线”与圆$(x-3)^2+y^2=r^2$相切，则该圆的直径为

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．2　　D．$2\sqrt{2}$

例 7.(2021 通州一模)已知在圆$(x-1)^2+y^2=r^2$上到直线$x-y+3=0$的距离为$\sqrt{2}$的点恰有一个，则$r=$

A．$\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．2　　D．$2\sqrt{2}$

例 8.(2021 平谷一模)设P是圆$x^2+y^2-10x-6y+25=0$上的动点，Q是直线$x=-4$上的动点，则$|PQ|$的最小值为

A．6　　B．4　　C．3　　D．2

例 9.(2021 平谷一模)已知$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$分别是双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的两个焦点，双曲线$C_1$和圆$C_2:x^2+y^2=c^2$的一个交点为$P$，且$\angle PF_2F_1=\frac{\pi}{3}$，那么双曲线$C_1$的离心率为

A．$\frac{\sqrt{5}}{2}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．2　　D．$\sqrt{3}+1$

例 10.(2021 西城二模)在平面直角坐标系xOy中，点$A(1,1)$，$B(2,1)$，$C(2,2)$，P是圆$M:x^2+(y-4)^2=2$上一点，Q是$\triangle ABC$边上一点，则$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$的最大值是

A．$8+2\sqrt{2}$　　B．12　　C．$8+4\sqrt{2}$　　D．16

例 11.(2021 朝阳二模)已知抛物线C的焦点F到准线l的距离为 2，点P是直线l上的动点.若点A在抛物线C上，且$|AF|=5$，过点A作直线PF的垂线，垂足为H，则$|PH|\cdot|PF|$的最小值为

A．$2\sqrt{5}$　　B．6　　C．$\sqrt{41}$　　D．$2\sqrt{13}$

例 12.(2021 门头沟二模)点$P(cos\theta,sin\theta)$到直线$3x+4y-12=0$的距离的取值范围为

A. $\left[\frac{12}{5},\frac{17}{5}\right]$　　B. $\left[\frac{7}{5},\frac{12}{5}\right]$　　C. $\left[\frac{7}{5},\frac{17}{5}\right]$　　D. $\left[\frac{12}{5},\frac{24}{5}\right]$

【拓展】(2021 丰台期末)在平面直角坐标系中，A,B是直线$x+y=m$上的两点，且$|AB|=10$．若对于任意点$P(cos\theta,sin\theta)(0\le\theta\le2\pi)$，存在$A,B$使$\angle APB=90°$成立，则$m$的最大值为（　　）

A．$2\sqrt{2}$　　B．4　　C．$4\sqrt{2}$　　D．8

例 13.(2021 昌平二模)过原点且倾斜角为$45°$的直线被圆$x^2+y^2-4y=0$所截得的弦长为

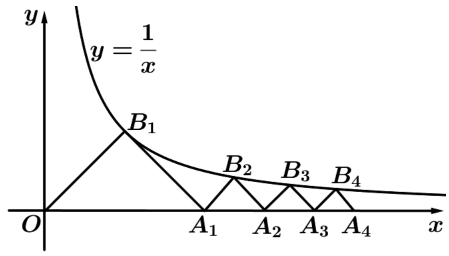
A．$2\sqrt{2}$　　B．3　　C．$4\sqrt{2}$　　D．8

例 14.(2020 房山一模)已知直线$l:y=m(x-2)+2$与圆$C:x^2+y^2=9$交于A,B两点，则使弦长$|AB|$为整数的直线l共有

A．6 条　　B．7 条　　C．8 条　　D．9 条

例 15.(2021 昌平一模)已知抛物线$C:y^2=4x$与椭圆$D:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$有一个公共焦点$F$，则点$F$的坐标是________；若抛物线的准线与椭圆交于A,B两点，O是坐标原点，且$\triangle AOB$是直角三角形，则椭圆D的离心率$e=$________.

例 16.(2021 通州二模)已知函数$f(x)=\frac{1}{x}$，设曲线$y=f(x)$在第一象限内的部分为E，过 O 点作斜率为 1 的直线交 E 于B_1，过B_1点作斜率为-1的直线交 x 轴于A_1，再过A_1点作斜率为 1 的直线交 E 于B_2，过B_2点作斜率为-1的直线交 x 轴于 A_2，…，依这样的规律继续下去，得到一系列等腰直角三角形，如图所示．给出下列四个结论：



①A_1B_2的长为$\frac{\sqrt{2}}{2}$;

②点A_3的坐标为$(2\sqrt{3},0)$;

③$\triangle A_2B_3A_3$与$\triangle A_3B_4A_4$的面积之比是$(\sqrt{3}-\sqrt{2}):(2-\sqrt{3})$;

④在直线$x=5$与 y 轴之间有 6 个三角形.

其中，正确结论的序号是________.

例 17.(2021 海淀二模)已知双曲线$M:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的左焦点为$F_1$，$A,B$为双曲线$M$上的两点，$O$ 为坐标原点若四边形F_1ABO为菱形，则双曲线 M 的离心率为__________.

例 18.(2020 丰台一模)已知双曲线 $M:x^2-\frac{y^2}{3}=1$的渐近线是边长为 1 的菱形$OABC$的边OA,OC所在直线.若椭圆$N:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）经过 A,C 两点，且点 B 是椭圆 N 的一个焦点，则$a=$______.

例 19.(2020 顺义二模)若直线$l:y=x+a$将圆$C:x^2+y^2=1$的圆周分成长度之比为 1:3 的两段弧，则实数a的所有可能取值是__________.

2.3 解析几何小题（高考）

例 1.(2021 北京卷)双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$过点$(\sqrt{2},\sqrt{3})$，且离心率为 2，则该双曲线的标准方程为

（A）$\frac{x^2}{3}-y^2=1$　　（B）$x^2-\frac{y^2}{3}=1$　　（C）$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{3}=1$　　（D）$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{2}=1$

例 2.(2021 北京卷)已知圆$C:x^2+y^2=4$，直线$l:y=kx+m$，则当k的值发生变化时，直线截得圆C弦长的最小值为 2，则m的取值为

（A）±2　　（B）$\pm\sqrt{2}$　　（C）$\pm\sqrt{3}$　　（D）±3

例 3.(2021 北京卷)已知抛物线$C:y^2=4x$，焦点为F，点M为抛物线C上的点，且$|FM|=6$，则M的横坐标是________；作$MN\perp x$轴于N，则$S_{\triangle FMN}=$________.

例 4.(2020 北京卷)某已知半径为1的圆经过点(3,4)，则其圆心到原点的距离的最小值为

（A）4　　（B）5　　（C）6　　（D）7

例 5.(2020 北京卷)设抛物线的顶点为O，焦点为F，准线为l.P是抛物线异于O的一点，过P作$PQ\perp l$于Q，则线段FQ的垂直平分线

（A）经过点O　　（B）经过点P　　（C）平行于直线OP　　（D）垂直于直线OP

例 6.(2020 北京卷)已知双曲线$C:\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1$.则$C$的右焦点的坐标为____；$C$的焦点到其渐近线的距离是____.

例 7.(2019 北京卷文)已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-y^2=1$（$a>0$）的离心率是$\sqrt{5}$，则$a=$

（A）$\sqrt{6}$　　（B）4　　（C）2　　（D）$\frac{1}{2}$

例 8.(2019 北京卷文)设抛物线$y^2=4x$的焦点为F，准线为l.则以F为圆心，且与l相切的圆的方程为________.

例 9.(2019 北京卷理)已知直线l的参数方程为$\begin{cases}x=1+3t,\\y=2+4t\end{cases}$（$t$为参数），则点(1,0)到直线$l$的距离是

（A）$\frac{1}{5}$　　（B）$\frac{2}{5}$　　（C）$\frac{4}{5}$　　（D）$\frac{6}{5}$

例 10.(2019 北京卷理)数学中有许多形状优美、寓意美好的曲线，曲线C：$x^2+y^2=1+|x|y$就是其中之一（如图）．给出下列三个结论：

①曲线C恰好经过6个整点（即横、纵坐标均为整数的点）；

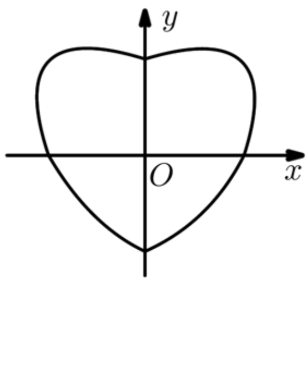
②曲线C上任意一点到原点的距离都不超过$\sqrt{2}$；

③曲线C所围成的“心形”区域的面积小于3.

其中，所有正确结论的序号是

（A）①　　（B）②

（C）①②　　（D）①②③



§3　解析几何大题

【模块解读】

纵观近年北京卷模拟题和高考真题，北京在解析几何大题的考察有一定规律：

1.考点主要分布在定值、定点、最值范围、几何证明四个大主题间，比如 20 年考察定值、19 文（理考抛物线不统计）考察定点、18 考察最值范围、17 考察几何证明，在 21 年考前预测大概是几何证明或者最值范围，最终的确考了最值范围.

2.同年的模拟题和高考题的考点基本不一致：如 20 年的模拟题几乎都是定点问题，高考却考了定值；21 年的模拟题几乎全是定值定点，高考却考了最值范围.这也侧面说明了利用模拟题预测高考考点的价值和作用不大，其作用在于模拟临考状态、打磨基本思路，所以：不要拿模拟题正面去压高考题.

3.高考题几乎都回避了直接的技巧，反过来考察最朴素自然的基本思路，也是在验收是否学生平时的基础足够扎实、是否有解决问题的能力等.

4.试题一般都有多种角度的解法，尤其是高考真题和海淀区模拟题.不同的思路衍生出了不同的解法，在平时练习中应当经常多进行一题多解，并反思哪种方法对哪种场景是最合适的，不断锤炼自己的基本思路，练出一条自己足够熟悉、考试使用感觉较稳妥的思路体系.

在本模块的讲义中，进行了如下设计：

1.内容方面，从“解题思路”、“运算技巧”、“题型方法”三个视角进行突破.

2.解题思路方面，主要涉及“基本转化法”，包含条件转化专题，以几何条件代数化为主要思路，在几何证明等题型有着广泛的应用；“动因导航法”，通过分析动点的动因，找到主动点与从动点，理清作图逻辑，进而求解，通常应用于草图较为复杂的题；“先猜后证法”，先猜后证是数学中的基本思想方法之一，在我们学习数列中就已经体会过该过程.此类方法通常先运用技巧猜出所求的定值或定点，之后通过该值或坐标的特征结合几何条件进行证明.

3.运算技巧方面，主要通过参数的引入顺序、方式以及化简过程两个角度进行突破，旨在提供一种较为简洁的过程书写，在考试时即可做到思路清晰.

4.题型技巧方面，主要通过对四大考点进行刷题练习，通过例题和练习题，对题型方法生成一脉自然的基本思路，做到遇见新题时能快速识别大致的考向，并能找准应对方法.

听过北京四中唐绍友老师的讲座，他提到了解析几何大题的三个准备：坚强的意志力、美好的幻想、良好的技巧.在日复一日的刷题生活中，逐渐体会到了这三个准备的重要性.

1.解析几何大题的运算量一定是非常大的，正如章建跃所说，“数学运算是数学的童子功”，而解析几何大题就是来检验我们这项童子功的试题.也许算错、算混等情况都会出现在解题的过程中，而坚强的意志力能帮你稳住心态，有勇气算到最后，算错后有勇气检查出错的点.从每一道题起，都耐心、勇敢地去解，每一道做对的解析几何大题的积累将带给你做新题的无畏.

2.我认为美好的幻想是做题的经验和坚强的意志力带给的自信.当对解析几何大题的基本思路成竹在胸时，一切试题都好像能望穿过程到结果的这段长路.但若还没有这样的基础思路，那就先幻想，就如同马拉松一样，你可以暗示自己：再做几步就到下一个赋分点了，又可以多得分了；已经做到这一步了，马上就要出答案了吧；你甚至可以暗示自己，这套题前面难度不小，解析几何大题是不是该放放松了.

3.良好的技巧，不如说是朴素自然的思路.当训练量达到一定程度的时候，心中有了非常多常见结构的处理方法，并且一切都不再是生硬和刻意的，遇到一切困难，自然流露出思路方法，难题迎刃而解.

3.1 解析几何大题解题思路

引.一则寓言

有三只猎狗追一只土拨鼠，土拨鼠钻进了一个树洞.这只树洞只有一个出口，可不一会儿，从树洞里钻出一只兔子.兔子飞快地向前跑，并爬上一棵大树.兔子在树上，仓皇中没站稳，掉了下来，砸晕了正仰头看的三只猎狗，最后，兔子终于逃脱了.

粗看这则故事，一切自然流畅，但细想，故事之初土拨鼠钻进树洞，故事之末兔子飞跑而出，不经意间我们的关注点从土拨鼠变成了兔子，显然我们被“兔子”这个条件干扰了.

解题也是这样，也许我们会在做题中被某个干扰条件给吸引走集火的点，进而走偏.虽然解析几何大题的核心就是算，但不是死算，也不是瞎算.因此，我们应当关注我们的解题过程、运算逻辑，寻求优化我们解题思路的方法，不断锤炼出最适合自己的、最流畅的解题思路.

3.1.1 基本转化法

【例题引入】

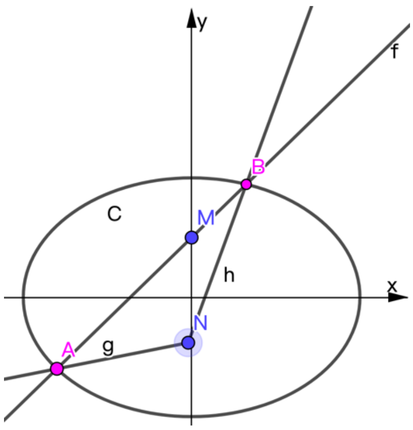
例 1.(2021 顺义二模)已知椭圆G:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，且过点$(2,\sqrt{2})$.

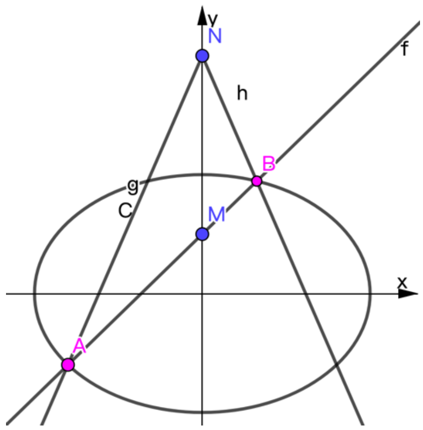
（Ⅰ）求椭圆G的方程;

（Ⅱ）过点$M(0,1)$斜率为$k(k\neq 0)$的直线l交椭圆G于A,B两点，在y轴上是否存在点N使得$\angle ANM=\angle BNM$（点N与点M不重合），若存在，求出点N的坐标，若不存在，请说明理由.

【思路引领】（Ⅰ）$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$;

（Ⅱ）根据题中条件作出草图后，发现当点N在短轴内时，显然$\angle ANM$与$\angle BNM$不可能相等；因此发现N应该在椭圆在纵轴正半轴顶点.此时，显然可以在直角三角形中将$\angle ANM$与$\angle BNM$的相等转化为底角的相等，进而转化为直线斜率之和为0，表达求解即可.





【方法总结】基本转化法的求解步骤

1.求解目标几何化：确定求解目标，作出草图并在几何图形中大致找出解题的突破口.

2.几何条件代数化：几何条件代数化的方式决定了接下来的解题方向.

3.关联代数化的运算目标与几何条件：选择最简便的方法引参、消参，最终得到答案.

几何条件代数化专题

一、准备知识

1.对象：题中的信息和所求.

2.知识储备：平面几何知识+平面解析几何知识（向量、三角、曲线方程、导数等）

3.原则：条件转化的目的是将复杂、具象的几何条件等信息抽象成平面解析几何模块熟悉的形式.因此条件转化的过程需要结合平面几何的基本性质，考虑到最适合代数化的角度进行转化，而转化的结果和终点依然是条件，因此要考虑到该角度是否与之后的解题步骤配适.

在圆锥曲线试题中，最常见的处理方向是韦达化处理，这也是几何条件代数化后通常的下一步.在此处我们暂不举例较明显的韦达化；举两个隐含的几何条件代数化后韦达化处理的案例（配凑）：

设直线l与曲线C交于$A(x_1,y_1)$和$B(x_2,y_2)$两点且该两点与原点不重合，点$M(2,0)$.

（1）$|AM|=|BM|$

根据两点间距离公式，$\sqrt{(x_1-2)^2+{y_1}^2}=\sqrt{(x_2-2)^2+{y_2}^2}$

等式两边同时平方得：$(x_1-2)^2+{y_1}^2=(x_2-2)^2+{y_2}^2$

展开、移项得到：$x_1+x_2-4=\frac{(y_2-y_1)(y_1+y_2)}{x_1-x_2}=-k(y_1+y_2)$

（2）$\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MB}$或$S_{\triangle OAM}=S_{\triangle OBM}$

A、M、B三点共线且$|\overrightarrow{AM}|=2|\overrightarrow{MB}|$，则$|\frac{y_1}{y_2}|=2$（三角形面积相等也可以得到）

以y_1,y_2异号为例：$\frac{y_1}{y_2}=-2$，所以$\frac{y_2}{y_1}=-\frac{1}{2}$，$\frac{y_1}{y_2}+\frac{y_2}{y_1}=\frac{{y_1}^2+{y_2}^2}{y_1y_2}=\frac{(y_1+y_2)^2-2y_1y_2}{y_1y_2}$

同时，也有部分试题不会用到韦达化处理，则一般需要用到曲线方程代换.

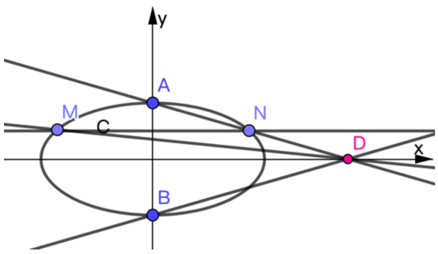
例 2.(2020 北京市适应性测试)已知椭圆C的短轴的两个端点分别为$A(0,1)$,$B(0,-1)$,焦距为$2\sqrt{3}$.

（Ⅰ）求椭圆C的方程；

（Ⅱ）已知直线$y=m$与椭圆C有两个不同的交点M、N，设D为直线AN上一点，且直线BD、BM的斜率的积为$-\frac{1}{4}$. 证明：点D在x轴上.

【试题解析】（Ⅰ）$\frac{x^2}{4}+y^2=1$；

（Ⅱ）令$M(x_0,m)$，$N(-x_0,m)$，且$x_0\neq 0$，$-1<m<1$.由题意知，$A(0,1)$，$B(0,-1)$，设l_{AN}: $y=kx+1$，则$k=\frac{1-m}{x_0}$，所以$D(d,kd+1)$，$k_{BD}=\frac{kd+2}{d}$，又$k_{BM}=\frac{m-(-1)}{x_0-0}=\frac{m+1}{x_0}$；因为直线$BD$、$BM$的斜率的积为$-\frac{1}{4}$，所以$\frac{m+1}{x_0}\cdot\frac{kd+2}{d}=-\frac{1}{4}$，得：$(4m^2-4-{x_0}^2)d=8x_0(m+1)$，又因$(x_0,m)$在椭圆上，所以${x_0}^2+4m^2-4=0$，${x_0}^2=-4m^2+4$，所以$y_D=kd+1=\frac{1-m}{x_0}\cdot\frac{x_0}{m-1}+1=0$，即点$D$在$x$轴上.



【方法总结】对于此类条件较多，草图较为复杂且所求不涉及切割弦的，考虑非韦达处理.

二、几何条件代数化的角度

1.点

（1）中点：中点坐标公式$(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2})$.

（2）三点共线：向量共线.

（3）点关于直线对称：点(x,y)关于直线$Ax+By+C=0$的对称点(x',y')，则$\begin{cases}\frac{y'-y}{x'-x}(-\frac{A}{B})=-1\\ A\frac{x+x'}{2}+B\frac{y+y'}{2}+C=0\end{cases}$.

2.角

（1）两直线夹角：$tan\,\theta=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}\right|$($k$都存在).

（2）角相等：考虑斜率相等，同时也可以从余弦定理的角度考虑（运算量大）.

3.直线

（1）平行：斜率、方向向量共线.

（2）垂直：向量点乘得0、斜率之积为-1.

（3）直线与圆锥曲线相切：$\Delta=0$、隐函数求导.

例 3.(高等数学例题)求椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$在点$(2,\frac{3\sqrt{3}}{2})$处的切线方程.

【试题解析】由导数的几何意义知，所求切线的斜率为曲线在$x=2$处的导，

对椭圆两边求导：$\frac{x}{8}+\frac{2}{9}y\cdot\frac{dy}{dx}=0$，

从而$\frac{dy}{dx}=-\frac{9x}{16y}$，当$x=2$代入上式得$k=-\frac{\sqrt{3}}{4}$.

【方法总结】我们所学过的函数章节中，对函数的定义是双射，而如圆锥曲线方程$F(x,y)=1$这样的二元函数关系出现了一个自变量对多个因变量的情况，对此类关系，称之为隐函数，而通过对隐函数进行约束，与在$y>0$范围内可以把圆锥曲线方程进行显化，而显化后的隐函数可以直接通过求导这样的基本方式求得切线的斜率.

4.三角形

等腰三角形：$\begin{cases}\text{两腰相等}\to\text{距离公式}\\ \text{底角相等}\to\text{与坐标轴垂直时可以转化为斜率相等}\\ \text{三线合一}\to\begin{cases}\text{垂直}\to\text{向量点乘得 0、斜率之积为}-1\\ \text{平分：中点坐标公式}\end{cases}\end{cases}$.

5.平行四边形

（1）基本性质：$\begin{cases}\text{对边相等}\to\text{距离公式、坐标差（平行四边形特有）}\\ \text{对边平行}\to\text{向量共线、斜率相等}\\ \text{对角线平分}\to\text{中点坐标公式}\end{cases}$.

（2）向量方法：对于平行四边形$OAPB$，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OP}$.

（3）菱形：平行四边形+对角线垂直平分.

6.圆：点与圆的位置关系可以用向量来体现.

【习题训练】

练 1.(2020 东城一模)已知椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$），它的上，下顶点分别为$A,B$，左，右焦点分别为$F_1,F_2$，若四边形$AF_1BF_2$为正方形，且面积为2.

（Ⅰ）求椭圆E的标准方程;

（Ⅱ）设存在斜率不为零且平行的两条直线l_1,l_2，它们与椭圆E分别交于点C,D,M,N，且四边形$CDMN$是菱形，求出该菱形周长的最大值.

练 2.(2020 丰台一模)已知椭圆$C:\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，点$P(1,0)$在椭圆$C$上，直线$y=y_0$与椭圆$C$交于不同的两点$A,B$.

（Ⅰ）求椭圆C的方程；

（Ⅱ）直线PA,PB分别交y轴于M,N两点，问：x轴上是否存在点Q，使得$\angle OQN+\angle OQM=\frac{\pi}{2}$？若存在，求出点$Q$的坐标；若不存在，请说明理由.

练 3.(2020 通州一模)已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，点$A(0,1)$在椭圆$C$上.

（Ⅰ）求椭圆C的方程；

（Ⅱ）设O为原点，过原点的直线(不与x轴垂直)与椭圆C交于M、N两点，直线AM、AN与x轴分别交于点E、F.问：y轴上是否存在定点G，使得$\angle OGE=\angle OFG$？若存在，求点G的坐标；若不存在，说明理由.

练 4.(2020 房山一模)已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$过$A(2,0)$,$B(0,1)$两点.

（Ⅰ）求椭圆C的方程和离心率的大小；

（Ⅱ）设M,N是y轴上不同的两点，若两点的纵坐标互为倒数，直线AM与椭圆C的另一个交点为P，直线AN与椭圆C的另一个交点为Q，判断直线PQ与x轴的位置关系，并证明你的结论.

练 5.(2020 密云一模)已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，且过点$A(0,1)$.

（Ⅰ）求椭圆C的标准方程；

（Ⅱ）点P是椭圆上异于短轴端点A,B的任意一点，过点P作$PQ\perp y$轴于Q，线段PQ的中点为M.直线AM与直线$y=-1$交于点N，D为线段BN的中点，设O为坐标原点，判断以OD为直径的圆与点M的位置关系.

3.1.2　动因导航法

【例题引入】

例 1.(2021人大附中考前热身)已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$经过如下四个点的三个点：$P_1(1,1)$，$P_2(0,1)$，$P_3(-1,\frac{\sqrt{3}}{2})$，$P_4(1,\frac{\sqrt{3}}{2})$

（Ⅰ）求椭圆C的方程；

（Ⅱ）过原点的直线与椭圆C交于A,B两点(A,B不是椭圆C的顶点).点D在椭圆C上，且$AD\perp AB$，直线BD与x轴交于点E，过点A作x轴的垂线，垂足为点M，直线BM与直线AE相交于点N.求证：$\triangle AMN$为等腰三角形.

【试题解析】（Ⅰ）$C:\frac{x^2}{4}+y^2=1$；

（Ⅱ）根据题意画出草图，容易想到，证$\triangle AMN$为等腰三角形⇔证$k_{MN}+k_{NA}=0$.

令$A(x_1,y_1)$，$B(-x_1,-y_1)$，$D(x_2,y_2)$，则$k_{AB}=\frac{y_1}{x_1}$，又$AD\perp AB$，所以$k_{AD}=-\frac{x_1}{y_1}$，令$l_{AD}:y=kx+y_1$

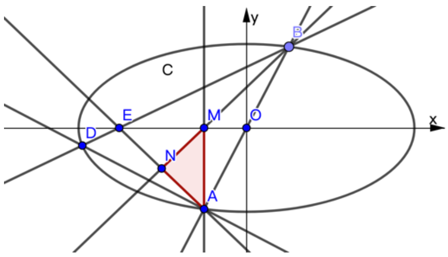
联立椭圆C与l_{AD} $\begin{cases}x^2+4y^2-4=0\\y=kx+y_1\end{cases}$，消$y$得到核心方程：$(4k^2+1)x^2+8ky_1x+4({y_1}^2-1)=0$

则$x_1x_2=\frac{4({y_1}^2-1)}{4k^2+1}$，$x_1+x_2=\frac{-8ky_1}{4k^2+1}$，所以$y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2y_1=\frac{2y_1}{4k^2+1}$

所以$k_{BD}=\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=\frac{2y_1}{-8ky_1}=-\frac{1}{4k}=\frac{y_1}{4x_1}$，所以$l_{BD}:y=\frac{y_1}{4x_1}(x+x_1)-y_1$

令$y=0$，得$x_E=3x_1$，$E(3x_1,0)$，所以$k_{AN}=k_{EA}=\frac{y_1}{x_1-3x_1}=-\frac{y_1}{2x_1}$

又$M(x_1,0)$，所以$k_{MN}=k_{BM}=\frac{y_1}{2x_1}$，所以$k_{MN}+k_{NA}=0$，即证出$\triangle AMN$为等腰三角形.



【思路引领】本题中的信息较多，草图画起来也让人很难有头绪.从动因思考，过原点的直线因为斜率变化导致两个交点的变化，之后所有点由这两个交点的变化而变化，因此考虑从该直线入手.

首先尝试斜参设法，发现如果用斜率表示所有的因动点，太过复杂，因此选用点参.进一步观察，发现A和B两点关于原点对称，可以减少引参数量，其次发现k_{BD}恰好可以通过把直线AD与椭圆联立用韦达化处理后的式子表示，再进一步观察发现所要证的$k_{MN}+k_{NA}=0$中的两根直线的斜率并不一定需要用这M、N、A三个点来求，可以转化成$k_{AN}=k_{EA}$以及$k_{MN}=k_{BM}$，发现刚好全部可以运用已经求得的点表示，可谓是“山穷水复疑无路，柳暗花明又一村”.

【方法总结】动因导航法的求解步骤

1.寻找动因：确定求解目标，找到使求解目标运动的根本原因.

2.几何关系：几何条件代数化的方式决定了接下来的解题方向.

3.合理引参：选择最简便的方法引参、消参，最终得到答案.

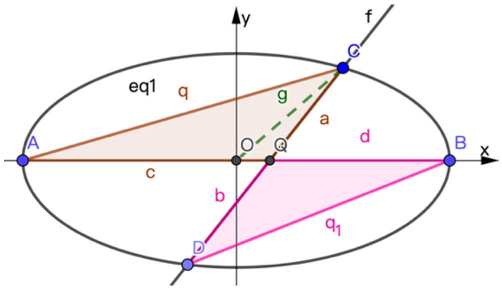
例 2.(2021 海淀期末)已知椭圆$W:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，且经过点$C(2,\sqrt{3})$.

（Ⅰ）求椭圆W的方程及其长轴长；

（Ⅱ）A,B为椭圆W的左、右顶点，点D在椭圆W上，且位于x轴下方，直线CD交x轴于点Q.若$\triangle ACQ$的面积比$\triangle BDQ$的面积大$2\sqrt{3}$，求点D的坐标.

【思路引领】（Ⅰ）$C:\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$；

（Ⅱ）根据题意画出草图，不难发现引起三角形面积变化的动因可以有三个角度：D、Q或直线CD，而题中条件涉及的两个三角形面积差$2\sqrt{3}$不难发现即是$\triangle ACO$的面积，因此容易推出$\triangle COQ$的面积与$\triangle BDQ$的面积相等，即要通过动点D的位置使两个三角形面积相等.为了使得这两个三角形的面积更好用同样的参数表示，连结BC，使得命题转变为求证$\triangle BCO$与$\triangle BCD$的面积相等，而此时O、C、B均为定点，为了使得两个三角形相等，在底同为BC的前提下，通过D的位置使得高相等，不难想到此时$BC\parallel OD$，运用两直线斜率相等或者向量共线均可轻松求得答案.



【方法总结】本题比较巧的地方在于$\triangle ACQ$与$\triangle BDQ$的面积差$2\sqrt{3}$刚好是一个已经确定的三角形，在变的大三角形中割出了一个不变的三角形，在动中找到了不动，体现了以数启形的命题思想.在确定了$\triangle BCO$与$\triangle BCD$的面积相等后，又进而通过斟酌三角形面积的表达方式，想到了同底等高的情况下两个三角形的面积一定相等，进而通过连接辅助线得到了最后的计算式.

总的来说，这个方法在本题中的应用比较巧，通过面积差的数值提示到去找这个值，又通过寻找动因的角度完成最后的条件转化和求解，这告诫我们做题前要三思而行，题中的数据不是白给的，通过数形结合说不定能得到更进一步的信息——几何上多走半步，代数上也许就会少算许多.

【一题多解】本题还有其他的基本思路，尝试再思考出一种其他的方法.

【习题训练】

练 1.(2020 新高考Ⅱ卷)已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$经过点$M(2,3)$,点$A$为左顶点,且$AM$的斜率为$\frac{1}{2}$,

（Ⅰ）求C的方程；

（Ⅱ）点N为椭圆上任意一点，求$\triangle AMN$的面积的最大值.

练 2.(2010 北京理)在平面直角坐标系xOy中，点B与点$A(-1,1)$关于原点O对称，P是动点，且直线AP与BP的斜率之积等于$-\frac{1}{3}$.

（Ⅰ）求动点P的轨迹方程；

（Ⅱ）设直线AP和BP分别与直线$x=3$交于点M,N，问：是否存在点P使得$\triangle PAB$与$\triangle PMN$的面积相等？若存在，求出点P的坐标；若不存在，说明理由.

练 3.(2013 北京理)已知A、B、C是椭圆W:$\frac{x^2}{4}+y^2=1$上的三个点，O是坐标原点.

（Ⅰ）当点B是W的右顶点，且四边形$OABC$为菱形时，求此菱形的面积.

（Ⅱ）当点B不是W的顶点时，判断四边形$OABC$是否可能为菱形，并说明理由.

3.1.3 先猜后证法

【例题引入】

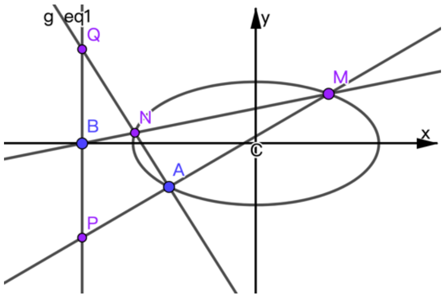
例 1.(2020 北京)已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$过点$A(-2,-1)$，且$a=2b$.

（Ⅰ）求椭圆C的方程；

（Ⅱ）过点$B(-4,0)$的直线l交椭圆C于点M,N, 直线MA,NA分别交直线$x=-4$于点P,Q．求$\frac{|PB|}{|BQ|}$的值.

【试题解析】（Ⅰ）C:$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$；

（Ⅱ）**法 1：先猜后证**　首先根据题中信息画出草图



猜：本题中定值涉及的两条线段$|PB|$和$|BQ|$，分别由定点A与动点M和N连线生成，当动点M和N的次序交换，这两条线段的长度是不会改变的，因此为了使这个比值不变，原来的$\frac{|PB|}{|BQ|}=\frac{|BQ|}{|PB|}=\frac{1}{\frac{|PB|}{|BQ|}}$，$\frac{|PB|}{|BQ|}$只能为1.

证：证明$\frac{|PB|}{|BQ|}=1$，即证$|PB|-|BQ|=0$，由图转化为$y_P+y_Q=0$，证明如下：

因直线过定点$B(-4,0)$在x轴上，反设直线l: $y=my-4$，设两交点$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$

易得$l_{AM}=y+1=\frac{y_1+1}{x_1+2}(x+2)$，令$x=-4$得$y_P=-\frac{2(y_1+1)}{x_1+2}-1$，同理知$y_Q=-\frac{2(y_2+1)}{x_2+2}-1$

$y_P+y_Q=-(\frac{2(y_1+1)}{x_1+2}+\frac{2(y_2+1)}{x_2+2}+2)=-2\frac{(y_1+1)(x_2+2)+(y_2+1)(x_1+2)+(x_1+2)(x_2+2)}{(x_1+2)(x_2+2)}$

此时要证$y_P+y_Q=0$，即证其分母为 0：

$(y_1+1)(x_2+2)+(y_2+1)(x_1+2)+(x_1+2)(x_2+2)$
$=(y_1+1)(my_2-2)+(y_2+1)(my_1-2)+(my_1-2)(my_2-2)$
$=m(m+2)y_1y_2-(m+2)(y_1+y_2)$

联立直线与椭圆$\begin{cases}x=my-4\\x^2+4y^2-4=0\end{cases}$，消去$x$得方程：$(m^2+4)y^2-8my+8=0$

由韦达定理得：$y_1y_2=\frac{8}{m^2+3}$，$y_1+y_2=\frac{8m}{m^2+3}$

代入原式$=m(m+2)\frac{8}{m^2+3}-(m+2)\frac{8m}{m^2+3}=0$，所以$y_P+y_Q=0$，$|y_P|=|y_Q|$

所以$\frac{|PB|}{|BQ|}=\frac{|y_P|}{|y_Q|}=1$.

法 2：非对称韦达 同**法 1** 可求得$y_P=-\frac{x_1+2y_1+4}{x_1+2}$，$y_Q=-\frac{x_2+2y_2+4}{x_2+2}$

由图又知$\frac{|PB|}{|BQ|}=\frac{|y_P|}{|y_Q|}=\frac{|-\frac{x_1+2y_1+4}{x_1+2}|}{|-\frac{x_2+2y_2+4}{x_2+2}|}=\frac{(x_1+2y_1+4)(x_2+2)}{(x_2+2y_2+4)(x_1+2)}$

同**法 1** 设直线、联立，化简得原式$=|\frac{(m+2)my_1y_2-2(m+2)y_1}{(m+2)my_1y_2-2(m+2)y_1}|=|\frac{my_1y_2-2y_1}{my_1y_2-2y_2}|$

观察该式子不难发现，进一步化简的痛点在于分子分母存在不同的y_1和y_2，因此需要通过和积使得上下变为相同的未知数：因为$y_1y_2=\frac{8}{m^2+3}$，$y_1+y_2=\frac{8m}{m^2+3}$，所以$y_1y_2=m(y_1+y_2)$

所以可以将式子中的积转化为和或者凑出和进行化简

角度 1：$y_1=(y_1+y_2)-y_2$，$\left|\frac{my_1y_2-2(y_1+y_2-y_2)}{my_1y_2-2y_2}\right|=\left|\frac{my_1y_2-2(y_1+y_2)+2y_2}{my_1y_2-2y_2}\right|=|\frac{my_1y_2-2my_1y_2+2y_2}{my_1y_2-2y_2}|=1$

角度 2：$y_1y_2=m(y_1+y_2)$，$|\frac{y_1+y_2-2y_1}{y_1+y_2-2y_2}|=|\frac{y_2-y_1}{y_1-y_2}|=1$

这两个角度均可以得到$\frac{|PB|}{|BQ|}=\frac{|y_P|}{|y_Q|}=1$.

【方法总结】先猜后证法的求解步骤

1.猜出结论：通过特殊位置及一些结论得到题目答案.

2.合理引参：结合猜出的结论、选择运算量最小的方式条件转化.

3.代入猜测：数学运算；选最后一步可能需要代入所求得.

【题型拓展】非对称韦达的处理方法

在本题中，非对称韦达体现在式子$|\frac{my_1y_2-2y_1}{my_1y_2-2y_2}|$.解决此类问题的一般方向是从化简的痛点入手进行研究，通常利用和积转换或定比点差等策略进行化简（推荐使用和积转换），因此联立得韦达式子的难易决定了和积转换的难易：定点在坐标轴上的直线联立后y_1+y_2与y_1y_2或x_1+x_2与x_1x_2通常直接具有常数倍关系（在后续章节会专门提到直线的设法），如本题中$y_1y_2=\frac{8}{m^2+3}$,$y_1+y_2=\frac{8m}{m^2+3}$,$y_1y_2=m(y_1+y_2)$，因此直线合适的选取是轻松解决该类型问题的前提.

【试题点评】本题考查了解析几何中的主要方法，需要学生具备一定的数学运算核心素养，并能够程序化思考问题.第二小问需要学生在计算过程中，具有一丝不苟，严谨求实的精神，充分体现了北京卷继续坚持对“四具备”人才的考查.

例 2.(2021 西城一模)已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{3}=1(a>0)$的焦点在$x$轴上，且经过点$E(1,\frac{3}{2})$，左顶点为$D$，右焦点为$F$.

（Ⅰ）求椭圆C的离心率和$\triangle DEF$的面积；

（Ⅱ）已知直线$y=kx+1$与椭圆C交于A,B两点，过点B作直线$y=t(t>\sqrt{3})$的垂线，垂足为G，判断是否存在常数t，使得直线AG经过y轴上的定点？若存在，求t的值；若不存在，请说明理由.

【官方标答】（Ⅰ）依题意，$\frac{1}{a^2}+\frac{3}{4}=1$，解得$a=2$.

因为$c^2=a^2-b^2=4-3=1$，即$c=1$，所以$D(-2,0)$，$F(1,0)$

所以离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，$\triangle DEF$的面积$S=\frac{1}{2}\times 3\times\frac{3}{2}=\frac{9}{4}$.

（Ⅱ）由已知，直线DE的方程为$y=\frac{1}{2}x+1$.

当$A(-2,0)$，$B(1,\frac{3}{2})$，$G(1,t)$时，直线AG的方程为$y=\frac{t}{3}(x+2)$，交y轴于点$(0,\frac{2}{3}t)$；

当$A(1,\frac{3}{2})$，$B(-2,0)$，$G(-2,t)$时，直线AG的方程为$y-\frac{3}{2}=\frac{t-\frac{3}{2}}{-3}(x-1)$，交$y$轴于点$(0,\frac{t+3}{3})$.

若直线AG经过y轴上定点，则$\frac{2}{3}t=\frac{t+3}{3}$，即$t=3$，直线$AG$交$y$轴于点$(0,2)$.

下面证明存在实数$t=3$，使得直线AG经过y轴上定点$(0,2)$.

联立$\begin{cases}y=kx+1\ ,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$ 消y整理，得$(4k^2+3)x^2+8kx-8=0$

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则$x_1+x_2=\frac{-8k}{4k^2+3}$，$x_1x_2=\frac{-8}{4k^2+3}$.

设点$G(x_2,3)$，所以直线AG的方程：$y-3=\frac{y_1-3}{x_1-x_2}(x-x_2)$.

令$x=0$，得$y=\frac{-x_2y_1+3x_2}{x_1-x_2}+3=\frac{3x_1-x_2y_1}{x_1-x_2}=\frac{3x_1-x_2(kx_1+1)}{x_1-x_2}=\frac{3x_1-x_2-kx_1x_2}{x_1-x_2}$.

因为$kx_1x_2=x_1+x_2$，所以$y=\frac{3x_1-x_2-(x_1+x_2)}{x_1-x_2}=\frac{2x_1-2x_2}{x_1-x_2}=2$，所以直线$AG$过定点$(0,2)$.

综上，存在实数$t=3$，使得直线AG经过y轴上定点$(0,2)$.

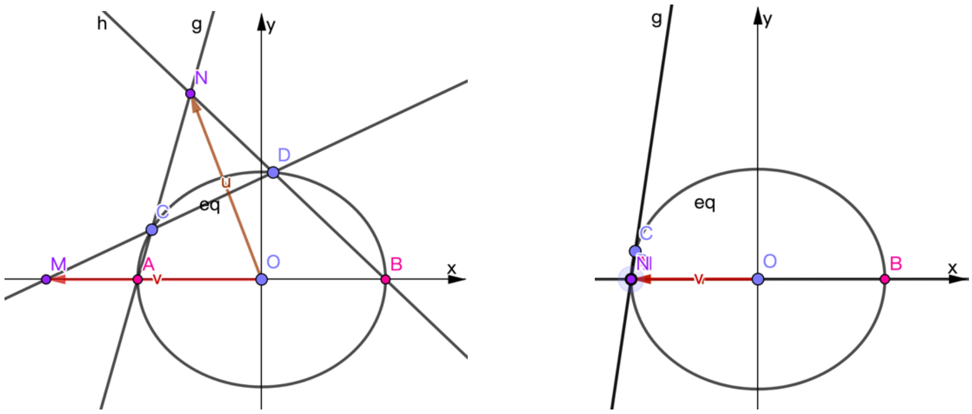
【方法总结】先猜后证法的两个用法及其原理

1.代数的依据：如 2020 高考真题中，通过猜出该分式的定值为 1，进而想到上下相减得 0，起到了代数依据的效用，在解题过程的书写之前就先拿住了结果，确定了整道题的思路.

2.充分必要性：此方向通常应用在证明过程中，如本题中先用点的次序交换的方法结合一定计算得出了定值，相当于证出了充分性，加上划线一句及后序证明必要性的过程，让整个证明过程中的充分性和必要性完备，得论证充要，所猜想的命题得证.

例 3.直线l与椭圆$w:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$相交于$C,D$，与$x$轴相交于$M$，已知$A,B$是椭圆的左右顶点，且直线$AC,BD$相交于点$N$，证明：$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$是定值.

【思路引领】在本题中的猜想可以利用到极限位置：将M逼近A，则N也逼近A，此时$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=4$.



【方法总结】先猜后证中“猜”的几个方向

1.代入特殊点：通过代入一个任意的满足条件的点，通过计算可以求得定值（定点），这个方法比较常规，同时计算量也相对大一些，一般在没有其他更好角度的时候运用.

2.点次序交换：点次序交换并不会改变原来位置线段的长度，而为了保证定值的不变，可以通过观察原定值的标答式和新定值的表达式综合考虑，如 2020 高考题.

3.特殊位置法：如垂直与坐标轴的直线，亦包括本题中的极限位置，此角度通常计算量小于第一种.

4.高观点方法：如极点极线、仿射变换等，会在后续章节提到.

【习题训练】

练 1.(2020 全国 I 卷理)已知A、B分别为椭圆$E:\frac{x^2}{a^2}+y^2=1\ (a>1)$的左、右定点，$G$为$E$的上顶点，$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{GB}=8$，$P$为直线$x=6$上的动点，$PA$与$E$的另一交点为$C$，$PB$与$E$的另一交点为$D$.

（Ⅰ）求E的方程；

（Ⅱ）证明：直线CD过定点.

练 2.(2021 昌平期末)已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$的长轴长为$4$，且离心率为$\frac{1}{2}$.

（Ⅰ）求椭圆C的方程；

（Ⅱ）设过点$F(1,0)$且斜率为k的直线l与椭圆 C 交于A,B两点，线段AB的垂直平分线交x轴于点D，判断$\frac{|AB|}{|DF|}$是否为定值？如果是定值，请求出此定值；如果不是定值，请说明理由.

练 3.(2021 延庆一模)已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$经过点$P(1,\frac{\sqrt{2}}{2})$，离心率$e=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

（Ⅰ）求椭圆C的标准方程；

（Ⅱ）设AB是经过椭圆右焦点F的一条弦（不经过点P且A在B的上方），直线AB与直线$x=2$相交于点M，记PA,PB,PM的斜率分别为k_1,k_2,k_3，将k_1、k_2、k_3如何排列能构成一个等差数列，证明你的结论.

3.2　解析几何大题运算技巧

3.2.1　合理引参

【例题引入】

例 1.(2021 海淀一模)已知椭圆$M:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$过$A(-2,0),B(0,1)$两点.

（Ⅰ）求椭圆M的离心率；

（Ⅱ）设椭圆M的右顶点为C，点P在椭圆M上（P不与椭圆M的顶点重合），直线AB与直线CP交于点Q，直线BP交x轴于点S，求证：直线SQ过定点.

【试题解析】（Ⅰ）$C:\frac{x^2}{4}+y^2=1$；$e=\frac{\sqrt{3}}{2}$；

（II）**思路 1（设点）：**令$P(x_0,y_0)$，由题意得：$l_{AB}:y=\frac{1}{2}x+1$，设$l_{PC}:y=\frac{y_0}{x_0-2}(x-2)$

联立直线AB与PC，得$Q(\frac{4y_0+2x_0-4}{2y_0-x_0+2},\frac{4y_0}{2y_0-x_0+2})$

又$l_{BP}:y=\frac{y_0-1}{x_0}x+1$，得$S(\frac{x_0}{1-y_0},0)$，$k_{QS}=\frac{\frac{4y_0}{2y_0-x_0+2}}{\frac{4y_0+2x_0-4}{2y_0-x_0+2}-\frac{x_0}{1-y_0}}=\frac{2y_0(y_0-1)}{4y_0^2+2x_0y_0-4y_0}$

所以$l_{QS}:y=\frac{2y_0(y_0-1)}{4y_0^2+2x_0y_0-4y_0}(x-\frac{x_0}{1-y_0})$，令$x=2$，$y=\frac{2y_0(y_0-1)}{4y_0^2+2x_0y_0-4y_0}\cdot\frac{2y_0+x_0-2}{y_0-1}=1$

所以，直线QS恒过定点(2,1).

思路 2（设线）：由题意得：$l_{AB}:y=\frac{1}{2}x+1$，设$l_{AB}:y=\frac{1}{2}x+1$，联立得$Q(\frac{4k+2}{2k-1},\frac{4k}{2k-1})$

联立直线PC与曲线M，得$P(\frac{8k^2-2}{4k^2+1},\frac{-4k}{4k^2+1})$，所以$l_{BP}:y=\frac{\frac{-4k}{4k^2+1}-1}{\frac{8k^2-2}{4k^2+1}}x+1=\frac{1+2k}{2-4k}x+1$

令$y=0$，得$x=\frac{4k-2}{2k+1}$，即$S(\frac{4k-2}{2k+1},0)$，所以$l_{SQ}:y=\frac{\frac{4k}{2k-1}}{\frac{4k-2}{2k+1}-\frac{4k+2}{2k-1}}(x-\frac{4k-2}{2k+1})=\frac{2k+1}{4}(x-2)+1$

令$x=2$，易得$y=1$.所以，直线QS恒过定点(2,1).

思路 3（设线）：由题意得：$l_{AB}:y=\frac{1}{2}x+1$，设$l_{PC}:x=my+2$，联立得$Q(\frac{2m+4}{2-m},\frac{4}{2-m})$

联立直线PC与曲线M，得$P(\frac{8-2m^2}{m^2+4},\frac{-4m}{m^2+4})$，所以$l_{BP}:y=\frac{1+\frac{4m}{m^2+4}}{\frac{2m^2-8}{m^2+4}}x+1=\frac{m+2}{2(m-2)}x+1$

令$y=0$，得$x=\frac{2(2-m)}{m+2}$，即$S(\frac{4-2m}{m+2},0)$，所以$l_{SQ}:y=\frac{\frac{4}{2-m}}{\frac{2m+4}{2-m}+\frac{2m-4}{2+m}}(x+\frac{2m-4}{m+2})=\frac{m+2}{4m}(x-2)+1$

令$x=2$，易得$y=1$.所以，直线QS恒过定点(2,1).

【方法总结】设直线的技巧

1.正设反设的选法：当定点在x轴上时，选择反设直线；当定点在y轴上时，选择正设直线——好处在于韦达化处理的时候积的分子为常数且和积具有倍数关系，可以直接转换.

2.当定点不在坐标轴上时，大概率选择点斜式.虽然点斜式会增加韦达化处理后的运算和化简，但是定点不在坐标轴上时不得不选择点斜式进行计算.

【做后反思】自行写出思路 2 和 3 中直线与曲线联立的过程，并体会上述设直线的技巧.

例 2.(2021 丰台一模)已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$长轴的两个端点分别为$A(-2,0),B(2,0)$，离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（Ⅰ）求椭圆C的方程；

（Ⅱ）P为椭圆C上异于A,B的动点，直线AP,PB分别交直线$x=-6$于M,N两点，连接NA并延长交椭圆C于点Q.

（ⅰ）求证：直线AP,AN的斜率之积为定值；

（ⅱ）判断M,B,Q三点是否共线，并说明理由.

【试题解析】（Ⅰ）$C:\frac{x^2}{4^2}+y^2=1$；（Ⅱ）（ⅰ）AP,AN的斜率之积为$\frac{1}{2}$；

（ⅱ）M,B,Q三点共线，设直线AP斜率为k，易得$M(-6,-4k)$.

由（ⅰ）可知直线AN斜率为$-\frac{1}{2k}$，所以直线AN的方程为$y=-\frac{1}{2k}(x+2)$.

联立$\begin{cases}x^2+4y^2-4=0,\\ x=-2ky-2,\end{cases}$可得$(4+4k^2)y^2+8ky=0$.

解得Q点的纵坐标为$\frac{-2k}{1+k^2}$，所以Q点的坐标为$Q(\frac{2k^2-2}{1+k^2},\frac{-2k}{1+k^2})$.

所以，直线BQ的斜率为$\frac{\frac{-2k}{1+k^2}-0}{\frac{2k^2-2}{1+k^2}-2}=\frac{k}{2}$，直线$BM$的斜率为$\frac{-4k-0}{-6-2}=\frac{k}{2}$.

因为直线BQ的斜率等于直线BM的斜率，所以M,B,Q三点共线.

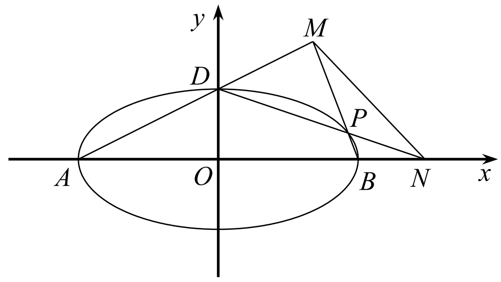
【思路引领】第二问已经求出了AP,AN的斜率之积为定值$\frac{1}{2}$，在引参的时候可以结合前面问已经求出的定值进而设直线AP的斜率为k，相比于设点，可以减少极大的计算量.

【一题多解】尝试设点解决本题.

例 3.(2013 江西文)椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率$e=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$a+b=3$.

（Ⅰ）求椭圆C的方程；

（Ⅱ）如图，A、B、D是椭圆C的顶点，P是椭圆C上除顶点外的任意点，直线DP交x轴于点N直线AD交BP于点M，设BP的斜率为k，MN的斜率为m，证明：$2m-k$为定值.



【试题解析】（Ⅰ）$\frac{x^2}{4}+y^2=1$；

（Ⅱ）**思路 1（设点）**：显然设点$P(x_0,y_0)(x_0\neq 0，x_0\neq\pm2)$，则$k=\frac{y_0}{x_0-2}$，

直线AD为$y=\frac{1}{2}(x+2)$，直线BP为$y=\frac{y_0}{x_0-2}(x-2)$，联立可解得$M(\frac{4y_0+2x_0-4}{2y_0-x_0+2},\frac{4y_0}{2y_0-x_0+2})$.

直线DP为$y-1=\frac{y_0-1}{x_0}x$，令$y=0$，可得点$N(\frac{-x_0}{y_0-1},0)$，故MN的斜率为：

$$m=\frac{\frac{4y_0}{2y_0-x_0+2}}{\frac{4y_0+2x_0-4}{2y_0-x_0+2}+\frac{x_0}{y_0-1}}=\frac{4y_0(y_0-1)}{4y_0^2-8y_0+4x_0y_0-x_0^2+4}=\frac{4y_0(y_0-1)}{4y_0^2-8y_0+4x_0y_0-(4-4y_0^2)+4}=\frac{y_0-1}{2y_0+x_0-2},$$

因此，$2m-k=\frac{2(y_0-1)}{2y_0+x_0-2}-\frac{y_0}{x_0-2}=\frac{2(y_0-1)(x_0-2)-y_0(2y_0+x_0-2)}{(2y_0+x_0-2)(x_0-2)}$

$$=\frac{2(y_0-1)(x_0-2)-2y_0^2-y_0(x_0-2)}{(2y_0+x_0-2)(x_0-2)}=\frac{2(y_0-1)(x_0-2)-\frac{1}{2}(4-x_0^2)-y_0(x_0-2)}{(2y_0+x_0-2)(x_0-2)}=\frac{1}{2}.$$

思路 2（设线）：由于点P不为椭圆顶点，故设直线BP为$x=ty+2(t\neq0，t\neq\pm2)$，$k=\frac{1}{t}$，

直线BP与椭圆联立：$(t^2+4)y^2+4ty=0$，解得点$P(\frac{8-2t^2}{t^2+4},-\frac{4t}{t^2+4})$，

直线AD为$y=\frac{1}{2}x+1$，与直线BP联立，解得点$M(\frac{4+2t}{2-t},\frac{4}{2-t})$，

直线DP为$y=-\frac{t+2}{4-2t}x+1$，令$y=0$，可得点$N(\frac{4-2t}{2+t},0)$，

故MN的斜率为：$m=\frac{\frac{4}{2-t}}{\frac{4+2t}{2-t}-\frac{4-2t}{2+t}}=\frac{2+t}{4t}$，故$2m-k=\frac{2+t}{2t}-\frac{1}{t}=\frac{1}{2}$.

【方法总结】设点和设线的选用

1.设线，即以直线斜率为参数，通过把直线方程与曲线联立，进而利用韦达定理写出关系式求解，如例 1 中的思路 2 和 3；也有一些特殊的情况，如例 2 在前面的问中解出了与第三问直接相关基本量，并且提示了斜率的方向，因此很自然地想到了设线.

2.设点，即以点为参数，用点表示斜率等基本量，直接进行粗暴的运算.思路流畅，但是计算量通常也会非常大，如例 1 的思路 1 和例 3 的思路 1，明显可以感觉到计算量之大.

3.对于一道解析几何大题而言，通常没有一定正确的思路，如什么情况必须设直线、什么地方必须设点，正确的做法应当是认真读题，然后分析动因，在动中找到不动，寻到最简便的运算方法.

3.2.2　化简原则

【观点概说】

化简的对象通常因设点和线的选用而归于不同的难点.

韦达化处理方向，难点在于复杂的式子中如何找到运用韦达定理的结构，甚至有时候会出现需要处理非对称韦达定理的情况.因此，在韦达化处理的过程中，应当先化简到最终结果，确定最合适的韦达化处理的角度，再代入韦达定理得到的和、差式，这样以来做题会思路清晰.反观，若从头到尾都是代入的最原始的式子，在化简方面不甚思考，按部就班地推演，最终会多很多多余的计算量，并且还可能因为版面的局促而导致过失性丢分，得不偿失.

非韦达处理方向，难点在于从几何关系中找到进一步化简的条件，并在关键步骤中代入化简.非韦达类型题的特点通常是几何要素较多，化简方向比较灵活，因此在化简此类问题的过程当中，一定不要忘记兼顾所有几何条件，尤其点在直线和曲线上的条件等容易遗忘.

3.3　解析几何大题题型方法

3.3.1　定值定点问题

【例题引入】

例 1.(2021 丰台二模)已知椭圆$C:\frac{x^2}{3}+y^2=1$，过点$(-1,0)$的直线l交椭圆C于点A,B.

（Ⅰ）当直线l与x轴垂直时，求$|AB|$；

（Ⅱ）在x轴上是否存在定点P，使$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$为定值？若存在，求点$P$的坐标及$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$的值；若不存在，说明理由.

【试题解析】（Ⅰ）$|AB|=\frac{2\sqrt{6}}{3}$；

（Ⅱ）设直线$l:x=my-1$，两交点$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$P(p,0)$

$\overrightarrow{PA}=(x_1-p,y_1)$，$\overrightarrow{PB}=(x_2-p,y_2)$

所以$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(x_1-p,y_1)\cdot(x_2-p,y_2)=(x_1-p)(x_2-p)+y_1y_2$

$=x_1x_2-p(x_1+x_2)+p^2+y_1y_2=(my_1-1)(my_2-1)-p[m(y_1+y_2)-2]+p^2+y_1y_2$

$=(m^2+1)y_1y_2-m(p+1)(y_1+y_2)+1+2p+p^2$

联立直线与椭圆：$\begin{cases}x=my-1\\x^2+3y^2-3=0\end{cases}$，消去$x$得核心方程：$(m^2+3)y^2-2my-2=0$

由韦达定理得：$y_1y_2=\frac{-2}{m^2+3}$，$y_1+y_2=\frac{2m}{m^2+3}$

代入原式得$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\frac{-2(m^2+1)}{m^2+3}-\frac{2m^2(p+1)}{m^2+3}+(p+1)^2=-\frac{2(p+2)m^2+2}{m^2+3}+(p+1)^2$

因为该式为定值，易知$2(p+2)=\frac{2}{3}$，解得$p=-\frac{5}{3}$

所以$P(-\frac{5}{3},0)$，该定值为$-\frac{2}{3}+\frac{4}{9}=-\frac{2}{9}$.

【做后反思】在最终化简得到的最终式子$-\frac{2(p+2)m^2+2}{m^2+3}+(p+1)^2$中，为了确保在任意情况下该值都为定值，则需要通过$p$取到某个定值将参数$m$的影响处理掉，因为不难想到$2(p+2)m^2+2$和$m^2+3$具有倍数关系，通过常数2入手计算即可.

【方法总结】定值问题的处理

1.从特殊入手，先求出定点或定值，再证明这个点或值与参数无关.

2.直接推理、计算，并在计算过程中消去变量，从而得到定点或定值.

3.选择合适的参数，并利用这个参数得到有关的曲线方程或函数关系式是解决问题的关键.

4.表达基本量的几个角度：弦长公式、韦达定理、点在直线和曲线上.

例 2.(2019 北京文)已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的右焦点为$(1,0)$，且经过点$A(0,1)$.

（Ⅰ）求椭圆C的方程；

（Ⅱ）设O为原点，直线$l:y=kx+t(t\neq\pm1)$与椭圆C交于两个不同点P,Q，直线AP与x轴交于点M，直线AQ与x轴交于点N，若$|OM|\cdot|ON|=2$，求证：直线l经过定点.

【试题解析】（Ⅰ）$\frac{x^2}{2}+y^2=1$；

（Ⅱ）设$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则直线AP的方程为$y=\frac{y_1-1}{x_1}x+1$，令$y=0$，$x_M=-\frac{x_1}{y_1-1}$.

又$y_1=kx_1+t$，从而$|OM|=|x_M|=|\frac{x_1}{kx_1+t-1}|$；同理，$|ON|=|\frac{x_2}{kx_2+t-1}|$.

所以$|OM|\cdot|ON|=\left|\frac{x_1}{kx_1+t-1}\right|\cdot\left|\frac{x_2}{kx_2+t-1}\right|=|\frac{x_1x_2}{k^2x_1x_2+k(t-1)(x_1+x_2)+(t-1)^2}|$

联立直线与曲线,$\begin{cases}y=kx+t\\ \frac{x^2}{2}+y^2=1\end{cases}$,得$(1+2k^2)x^2+4ktx+2t^2-2=0$,则$x_1+x_2=-\frac{4kt}{1+2k^2},x_1x_2=\frac{2t^2-2}{1+2k^2}$.

所以$|OM|\cdot|ON|=|\frac{\frac{2t^2-2}{1+2k^2}}{k^2\cdot\frac{2t^2-2}{1+2k^2}+k(t-1)\cdot(-\frac{4kt}{1+2k^2})+(t-1)^2}=2|\frac{1+t}{1-t}|$

又$|OM|\cdot|ON|=2$，所以$2|\frac{1+t}{1-t}|=2$．解得$t=0$，所以直线l经过定点$(0,0)$.

【思路引领】本题已经给出了斜截式直线方程，并给出条件$|OM|\cdot|ON|=2$，因此想到通过求点M和N的坐标并表达$|OM|\cdot|ON|=2$这个条件，进而发现$2|\frac{1+t}{1-t}|=2$这个核心信息，求解方程即可得答案.

【试题点评】本题体现了典型的北京高考的命题思路，第一小问是圆锥曲线的基础性内容，这些内容都是高中的基础，解题中所使用的方法也是通性通法，杜绝题海战术中的机械训练.第二小问以解析几何为载体，突出了逻辑推理和数学运算的考查，纵观整个解题流程，舍弃了技巧性的东西，而是坚持考察了最朴素也是最自然的逻辑推理，一步一步推演之下，答案自然生成.

【习题训练】

定值问题

练 1.(2021 东城一模)已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$过点$D(-2,0)$，且焦距为$2\sqrt{3}$.

（Ⅰ）求椭圆C的方程；

（Ⅱ）过点$A(-4,0)$的直线l(不与x轴重合)与椭圆C交于P,Q两点，点T与点Q关于x轴对称，直线TP与x轴交于点H，是否存在常数λ，使得$|AD|\cdot|DH|=\lambda(|AD|-|DH|)$成立，若存在，求出$\lambda$的值；若不存在，说明理由.

练 2.(2021 平谷一模)已知椭圆C:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的离心率为$\frac{1}{2}$，并且经过$P(0,\sqrt{3})$点.

(Ⅰ)求椭圆C的方程；

(Ⅱ)设过点P的直线与x轴交于N点，与椭圆的另一个交点为B，点B关于x轴的对称点为B'，直线PB'交x轴于点M，求证：$|OM|\cdot|ON|$为定值.

练 3.(2021 怀柔一模)已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$过点$P(1,\frac{3}{2})$，且$a=2c$，若直线$l:y=kx+1$与椭圆 C 交于M,N两点，过点M作x轴的垂线分别与直线PO,NO交于点A,B，其中O为原点.

（Ⅰ）求椭圆C的方程；

（Ⅱ）若$\frac{|AB|}{|AM|}=1$，求k的值.

练 4.(2021 东城二模)已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点为$F$，左、右顶点分别为$A(-2,0),B(2,0)$，$|AF|=3|FB|$.

（Ⅰ）求椭圆C的方程；

（Ⅱ）设过$P(2,1)$的直线l与椭圆C交于不同的两点M,N，过点N作x轴的垂线，与直线BM交于点D,E为线段DN的中点．证明：直线BE的斜率为定值.

练 5.(2021 *海淀二模*)椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$的左、右焦点分别为$F_1,F_2,E$是椭圆 C 上一点，且$|F_1F_2|=2,|EF_1|+|EF_2|=4$.

（Ⅰ）求椭圆C的方程；

（Ⅱ）M,N是y轴上的两个动点(点M与点E位于x轴的两侧)，$\angle MF_1N=\angle MEN=90°$，直线$EM$交$x$轴于点$P$，求$\frac{|EP|}{|PM|}$的值.

练 6.(2021 房山二模)已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{1}{2}$，$O$为坐标原点，$F$是椭圆$C$的右焦点，$A$为椭圆$C$上一点，且$AF\perp x$轴，$|AF|=\frac{3}{2}$.

（Ⅰ）求椭圆C的方程；

（Ⅱ）过椭圆C上一点$P(x_0,y_0)(y_0\neq 0)$的直线$l:\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$与直线$AF$相交于点$M$，与直线$x=4$相交于点$N$.证明：$\frac{|MF|}{|NF|}$为定值.

练 7.(2021 门头沟二模)F_1,F_2分别为椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左右焦点，过右焦点$F_2$的直线$l$与椭圆$C$交于$A,B$两点，且$AB$不为长轴，$\triangle ABF_1$的周长为$8$，椭圆$C$的离心率为$\frac{1}{2}$.

（Ⅰ）求此椭圆C的方程；

（Ⅱ）A_2为其右顶点，求证：直线A_2A，A_2B两直线的斜率之积为定值，并求出此定值.

练 8.(2020 大兴一模)已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{1}{2}$，且经过点$(2,0)$，一条直线$l$与椭圆$C$交于$P,Q$两点，以$PQ$为直径的圆经过坐标原点$O$.

（Ⅰ）求椭圆C的标准方程；

（Ⅱ）求证：$\frac{1}{|OP|^2}+\frac{1}{|OQ|^2}$为定值.

练9.(2020平谷一模)已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的两个焦点是$F_1,F_2$，$M(\sqrt{2},1)$在椭圆$C$上，且$|MF_1|+|MF_2|=4$，$O$为坐标原点，直线$l$与直线$OM$平行，且与椭圆交于$A,B$两点.连接$MA$、$MB$与$x$轴交于点$D,E$.

（Ⅰ）求椭圆C的标准方程；

（Ⅱ）求证：$|\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}|$为定值.

练 10.(2020 *海淀二模*)已知椭圆W:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$过$A(0,1)$,$B(0,-1)$两点，离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（Ⅰ）求椭圆W的方程；

（Ⅱ）过点A的直线l与椭圆W的另一个交点为C，直线l交直线$y=2$于点M，记直线BC,BM的斜率分别为k_1,k_2，求k_1k_2的值.

练 11.(2020 朝阳二模)已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，且椭圆$C$经过点$(1,\frac{\sqrt{6}}{2})$.

（Ⅰ）求椭圆C的方程;

（Ⅱ）已知过点$P(4,0)$的直线l与椭圆C交于不同的两点A,B，与直线$x=1$交于点Q，设$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\mu\overrightarrow{QB}(\lambda,\mu\in\boldsymbol{R})$，求证：$\lambda+\mu$为定值.

练 12.(2020平谷二模)已知点$P(1,\frac{3}{2})$在椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上，$F(1,0)$是椭圆的一个焦点.

（Ⅰ）求椭圆C的方程；

（Ⅱ）椭圆C上不与P点重合的两点D,E关于原点O对称，直线PD,PE分别交y轴于M,N两点．求证：以MN为直径的圆被直线$y=\frac{3}{2}$截得的弦长是定值.

定点问题

练 1.(2021 朝阳一模)已知椭圆C的短轴的两个端点分别为$A(0,1), B(0,-1)$，离心率为$\frac{\sqrt{6}}{3}$.

（Ⅰ）求椭圆C的方程及焦点的坐标；

（Ⅱ）若点M为椭圆C上异于A, B的任意一点，过原点且与直线MA平行的直线与直线$y=3$交于点P，直线MB与直线$y=3$交于点Q，试判断以线段PQ为直径的圆是否过定点？若过定点，求出定点的坐标；若不过定点，请说明理由.

练 2.(2021 房山一模)已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$过点$(2,0)$，离心率为$\frac{1}{2}$.

（Ⅰ）求椭圆C的方程；

（Ⅱ）设点M为椭圆C的上顶点，A、B是椭圆C上两个不同的动点（不在y轴上），直线MA、MB的斜率分别为k_1、k_2，且$k_1k_2=3$，求证：直线AB过定点$N(0,-\frac{5}{3}\sqrt{3})$.

练 3.(2020 顺义二模)已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的焦距和长半轴长都为$2$.过椭圆$C$的右焦点$F$作斜率为$k(k\neq 0)$的直线$l$与椭圆$C$相交于$P,Q$两点.

（Ⅰ）求椭圆C的方程；

（Ⅱ）设点A是椭圆C的左顶点，直线AP,AQ分别与直线$x=4$交于点M,N.求证：以MN为直径的圆恒过点F.

3.3.2 最值范围问题

【例题引入】

例 1.(2021 北京)已知椭圆$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$过点$A(0,-2)$，以四个顶点围成的四边形面积为$4\sqrt{5}$.

（Ⅰ）求椭圆E的标准方程；

（Ⅱ）过点$P(0,-3)$的直线l斜率为k，交椭圆 E 于不同的两点B,C，直线AB，AC交$y=-3$于点M、N，直线AC交$y=-3$于点N，若$|PM|+|PN|\le 15$，求k的取值范围.

【试题解析】（Ⅰ）$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$；

（Ⅱ）设$B(x_1,y_1),C(x_2,y_2)$，因为直线BC的斜率存在，故$x_1x_2\ne 0$，设$l_{BC}:y=kx-3$

设直线$l_{AB}:y=\frac{y_1+2}{x_1}x-2$，令$y=-3$，则$x_M=-\frac{x_1}{y_1+2}$，同理$x_N=-\frac{x_2}{y_2+2}$.

又$|PM|+|PN|=|x_M+x_N|=\left|\frac{x_1}{y_1+2}+\frac{x_2}{y_2+2}\right|=\left|\frac{x_1}{kx_1-1}+\frac{x_2}{kx_2-1}\right|=\left|\frac{2kx_1x_2-(x_1+x_2)}{k^2x_1x_2-k(x_1+x_2)+1}\right|$

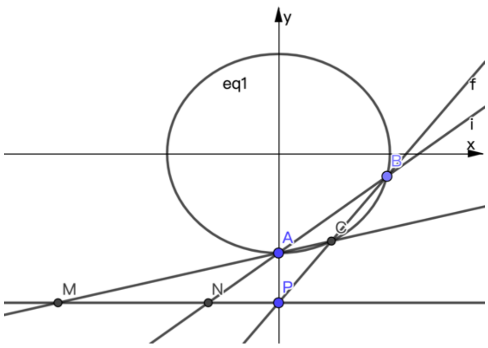
联立直线BC与椭圆，由$\begin{cases}y=kx-3\\4x^2+5y^2=20\end{cases}$，得$(4+5k^2)x^2-30kx+25=0$，

$\Delta=900k^2-100(4+5k^2)>0$，解得$k<-1$或$k>1$

又$x_1+x_2=\frac{30k}{4+5k^2},x_1x_2=\frac{25}{4+5k^2}$，故$x_1x_2>0$，所以$x_Mx_N>0$

所以$|PM|+|PN|=\left|\frac{\frac{50k}{4+5k^2}-\frac{30k}{4+5k^2}}{\frac{25k^2}{4+5k^2}-\frac{30k^2}{4+5k^2}+1}\right|=5|k|$，故$5|k|\le 15$即$|k|\le 3$

综上，$-3\le k<-1$或$1<k\le 3$.



【做后反思】本题出思路并不困难：直线已经给出，所求也工整、常规，难点在于最后的范围需要考虑判别式的正负性，其次若不画图不容易判断出M和N点在同侧.

【试题点评】本题考察了直线与椭圆的位置关系问题，是高中的主干知识，使用的方法是通性通法，体现了北京卷试题内容紧扣课标和教材，体现数学的本质，不出偏难怪题的原则，考查了解析几何中的主要方法，需要学生具备一定的数学运算核心素养和解决问题.

例 2.(2018 北京文节选)已知椭圆$M:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{6}}{3}$，焦距为$2\sqrt{2}$.斜率为$k$的直线$l$与椭圆$M$有两个不同的交点$A,B$.

（Ⅰ）求椭圆M的方程；

（Ⅱ）若$k=1$，求$|AB|$的最大值.

【试题解析】（Ⅰ）$\frac{x^2}{3}+y^2=1$；

（Ⅱ）设直线AB的方程为$y=x+m$，由$\begin{cases}y=x+m\\\frac{x^2}{3}+y^2=1\end{cases}$消去$y$可得$4x^2+6mx+3m^2-3=0$

则$\Delta=36m^2-4\times4(3m^2-3)=48-12m^2>0$，即$m^2<4$

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则$x_1+x_2=-\frac{3m}{2}$，$x_1x_2=\frac{3m^2-3}{4}$

则$|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{\sqrt{6}\times\sqrt{4-m^2}}{2}$

易得当$m^2=0$时，$|AB|_{max}=\sqrt{6}$，故$|AB|$的最大值为$\sqrt{6}$

【思路引领】本题主要考查椭圆与直线的位置关系，第一问只要找到a,b,c三者之间的关系即可求解；第二问主要考查学生对于韦达定理及弦长公式的运用，可将弦长公式$|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_2-x_1|$变形为$|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$，再将根与系数关系代入求解

【试题点评】本题梯度明显，体现北京特点，考查创新意识.前两小问都考查的是解析几何大题最基础和主干的题型，使用的方法是通性通法，弦长公式是教材上直线与圆锥曲线关系一课中提供的基本思路和方法，在近年模拟题中却很少出现，而高考的考查体现了北京卷试题内容紧扣课标和教材的思路，同时也警示我们要重视教材内容，完善主干知识体系.

例 3.(2014 北京文)已知椭圆$C: x^2+2y^2=4$.

（Ⅰ）求椭圆C的离心率;

（Ⅱ）设O为原点．若点A在直线$y=2$上，点B在椭圆C上，且$OA\perp OB$，求线段AB长度的最小值.

【试题解析】（Ⅰ）$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

（Ⅱ）设$A(t,2), B(x_0,y_0)(x_0\neq 0)$

由$OA\perp OB$，则有$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，即$tx_0+2y_0=0$，得$t=-\frac{2y_0}{x_0}$

所以$|AB|^2=(x_0-t)^2+(y_0-2)^2=(x_0+\frac{2y_0}{x_0})^2+(y_0-2)^2={x_0}^2+{y_0}^2+\frac{4{y_0}^2}{{x_0}^2}+4$

又$B(x_0,y_0)$在椭圆$C: x^2+2y^2=4$上，原式$={x_0}^2+\frac{4-{x_0}^2}{2}+\frac{2(4-{x_0}^2)}{{x_0}^2}+4=\frac{{x_0}^2}{2}+\frac{8}{{x_0}^2}+4$

因为$\frac{{x_0}^2}{2}+\frac{8}{{x_0}^2}\geq 4$，当且仅当${x_0}^2=4$时等号成立，所以$|AB|^2\geq 8$，$|AB|\geq 2\sqrt{2}$

【试题点评】本小题主要考查椭圆的标准方程与几何性质、两点距离公式、不等式等基础知识，试题注重了知识的结合，考查了平面向量与圆锥曲线的结合、不等式与函数的结合等，有一定的综合性，考查转化与化归等数学思想，考查正确的计算能力，考查同学们分析问题与解决问题的能力.

【方法总结】最值范围问题的处理方法

1.几何法：若题目中的条件或结论能明显体现某种几何特征及意义，或反映出了某种圆锥曲线的定义，则直接利用图形的性质或圆锥曲线的定义来求解.

2.代数法：将圆锥曲线中的最值问题通过建立目标函数，转化为函数的最值问题，再充分利用基本不等式、函数的单调性或三角函数的有界性等相关知识去求解.

【习题训练】

练 1.(2021 石景山一模)已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点为$F(1,0)$，且经过点$A(-2,0)$和点$B(2,0)$.

（Ⅰ）求椭圆C的方程；

（Ⅱ）M和N是椭圆C上两个不同的点，四边形$AMBN$是平行四边形，直线AM、AN分别交y轴于点P和点Q，求四边形$APFQ$面积的最小值.

练 2.(2021 通州一模)已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的短轴长为$2$，离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

（Ⅰ）求椭圆C的方程；

（Ⅱ）点P是椭圆C上一点，且在第一象限内，过P作直线与交y轴正半轴于A点，交x轴负半轴于B点，与椭圆C的另一个交点为 E，且$PA=AB$，点Q是P关于x轴的对称点，直线QA与椭圆C的另一个交点为F.

（i）证明：直线AQ，AP的斜率之比为定值；

（ii）求直线EF的斜率的最小值.

练 3.(2020 顺义二模)已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$经过$A(1,0)$,$B(0,b)$两点.$O$ 为坐标原点，且ΔAOB的面积为$\frac{\sqrt{2}}{4}$.过点$P(0,1)$且斜率为 $k(k>0)$的直线l与椭圆C有两个不同的交点M,N，且直线AM,AN分别与y轴交于点S,T.

（Ⅰ）求椭圆C的方程；

（Ⅱ）求直线l的斜率k的取值范围；

（Ⅲ）设$\overrightarrow{PS}=\lambda\overrightarrow{PO}$，$\overrightarrow{PT}=\mu\overrightarrow{PO}$，求$\lambda+\mu$的取值范围.

练 4.(2020 房山二模)已知椭圆C的两个顶点分别为$A(-2,0)$，$B(2,0)$，焦点在x轴上，离心率为$\frac{1}{2}$.

（Ⅰ）求椭圆C的方程；

（Ⅱ）设O为原点，点P在椭圆C上，点Q和点P关于x轴对称，直线AP与直线BQ交于点M，求证：P,M两点的横坐标之积等于4，并求$|OM|$的取值范围.

3.3.3　几何证明问题

【例题引入】

例.(2017 北京文)已知椭圆C的两个顶点分别为$A(-2,0)$，$B(2,0)$，焦点在x轴上，离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（Ⅰ）求椭圆C的方程；

（Ⅱ）点D为x轴上一点，过D作x轴的垂线交椭圆C于不同的两点M,N，过D作AM的垂线交BN于点E. 求证：$\triangle BDE$与$\triangle BDN$的面积之比为$4:5$.

【试题解析】（Ⅰ）$\frac{x^2}{4}+y^2=1$；

（Ⅱ）设$M(m,n)$，则$D(m,0),N(m,-n)$.

由题设知$m\neq\pm2$，且$n\neq0$，所以$k_{AM}=\frac{n}{m+2}$，$k_{DE}=\frac{m+2}{n}$

所以$l_{DE}:y=-\frac{m+2}{n}(x-m)$，$l_{BN}:y=\frac{n}{2-m}(x-2)$

联立$\begin{cases}y=-\frac{m+2}{n}(x-m)\\ y=\frac{n}{2-m}(x-2)\end{cases}$，得：$y_E=-\frac{n(4-m^2)}{4-m^2+n^2}$

又点M在椭圆C上，得$4-m^2=4n^2$，所以$y_E=-\frac{4}{5}n$.

又$S_{\triangle BDE}=\frac{1}{2}|BD|\cdot|y_E|=\frac{2}{5}|BD|\cdot|n|$，$S_{\triangle BDN}=\frac{1}{2}|BD|\cdot|n|$，

所以$\triangle BDE$与$\triangle BDN$的面积之比为$4:5$.

【题型点评】本题对考生计算能力要求较高，重点考查了计算能力，以及转化与化归的能力，解答此类题目，主要利用a,b,c,e的关系，确定椭圆方程是基础，本题易错点是对复杂式子的变形能力不足，导致错漏百出. 本题能较好地考查考生的逻辑思维能力、运算求解能力、分析问题与解决问题的能力等.

几何条件证明题在近年高考和模拟中多次出现，体现了初中平面几何所学的基本图形性质与高中平面解析几何方法之间的联系. 这类试题，将题中的几何信息正确地代数化是解决问题的根本. 因此，需要积累和灵活掌握相关条件转化的方法

【习题训练】

练 1.(2021 门头沟一模)曲线C上任一点$M(x,y)$到点$F_1(-1,0)$，$F_2(-1,0)$距离之和为$2\sqrt{2}$，点$P(x_0,y_0)$是曲线C上一点，直线l过点P且与直线$x_0x+2y_0y-2=0$垂直，直线l与x轴交于点Q.

（Ⅰ）求曲线C的方程及点Q的坐标（用点$P(x_0,y_0)$的坐标表示）;

（Ⅱ）比较$\frac{|PF_1|}{|PF_2|}$与$\frac{|QF_1|}{|QF_2|}$的大小，并证明你的结论.

练 2.(2021 西城二模)已知椭圆C: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的离心率为$\frac{\sqrt{6}}{3}$，其长轴的两个端点分别为$A(-3,0),B(3,0)$.

（Ⅰ）求椭圆C的标准方程；

（Ⅱ）点P为椭圆上除A，B外的任意一点，直线AP交直线$x=4$于点E，点O为坐标原点，过点O且与直线BE垂直的直线记为l，直线BP交y轴于点M，交直线l于点N，求$\triangle BMO$与$\triangle NMO$的面积之比.

练 3.(2021 朝阳二模)已知F为椭圆$C:\frac{x^2}{2}+y^2=1$的左焦点，直线$l:y=k(x-2)$与椭圆C交于不同的两点M,N.

（Ⅰ）当$k=-\frac{1}{2}$时，求ΔFMN的面积；

（Ⅱ）设直线FM、FN分别与直线$x=1$交于两点P,Q，线段MN,PQ的中点分别为G,H，点$A(\frac{1}{5},0)$.当k变化时，证明：A,G,H三点共线.

练 4.(2020 西城一模)设椭圆$E:\frac{x^2}{2}+y^2=1$，直线l_1经过点$M(m,0)$，直线l_2经过点$N(n,0)$，直线$l_1\parallel$直线l_2，且直线l_1,l_2分别与椭圆E相交于A,B两点和C,D两点.

（Ⅰ）若M，N分别为椭圆E的左、右焦点，且直线$l_1\perp x$轴，求四边形$ABCD$的面积；

（Ⅱ）若直线l_1的斜率存在且不为0，四边形$ABCD$为平行四边形，求证：$m+n=0$；

（III）在（Ⅱ）的条件下，判断四边形$ABCD$能否为矩形，说明理由.

练 5.(2020 海淀一模)已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，$A_1(-a,0),A_2(a,0),B(0,b)$，$\Delta A_1BA_2$的面积为 2.

（Ⅰ）求椭圆C的方程；

（Ⅱ）设M是椭圆C上一点，且不与顶点重合，若直线A_1B与直线A_2M交于点 P，直线A_1M与直线A_2B交于点Q.求证：$\triangle BPQ$为等腰三角形.

练 6.(2020 朝阳一模)已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，圆$O:x^2+y^2=r^2$（$O$为坐标原点）.过点$(0,b)$且斜率为$1$的直线与圆$O$交于点$(1,2)$，与椭圆$C$的另一个交点的横坐标为$-\frac{8}{5}$.

（Ⅰ）求椭圆C的方程和圆O的方程；

（Ⅱ）过圆O上的动点P作两条互相垂直的直线l_1,l_2，若直线l_1的斜率为$k(k\neq 0)$且l_1与椭圆C相切，试判断直线l_2与椭圆C的位置关系，并说明理由.

练 7.(2020 石景山一模)已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点为$F(1,0)$，离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.直线$l$过点$F$且不平行于坐标轴，$l$与$C$有两个交点$A,B$，线段$AB$的中点为$M$.

（Ⅰ）求椭圆C的方程；

（Ⅱ）证明：直线OM的斜率与l的斜率的乘积为定值；

（III）延长线段OM与椭圆C交于点P，若四边形$OAPB$为平行四边形，求此时直线l的斜率.

练 8.(2020 怀柔一模)已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$的短半轴长为$\sqrt{2}$，离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

（Ⅰ）求椭圆的方程；

（Ⅱ）设A,B是椭圆上关于坐标原点对称的两点，且点A在第一象限，$AE\perp x$轴，垂足为E，连接 BE 并延长交椭圆于点D，证明：ΔABD是直角三角形.

练 9.(2020 延庆一模)已知椭圆G：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左焦点为$F(-\sqrt{2},0)$,且经过点$C(-\sqrt{2},1)$, A,B分别是G的右顶点和上顶点，过原点O的直线l与G交于P,Q两点（点Q在第一象限），且与线段AB交于点M.

（Ⅰ）求椭圆G的标准方程；

（Ⅱ）若$|PQ|=3$，求直线l的方程；

（III）若$\triangle BOP$的面积是$\triangle BMQ$的面积的4倍，求直线l的方程.

练 10.(2020 东城二模)已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的一个顶点坐标为$A(0,-1)$，离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（Ⅰ）求椭圆C的方程；

（Ⅱ）若直线$y=k(x-1)(k\neq 0)$与椭圆C交于不同的两点P,Q，线段PQ的中点为M，点$B(1,0)$，求证：点M不在以AB为直径的圆上.

练 11.(2020 西城二模)已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$的离心率为$\frac{1}{2}$，右焦点为$F$，点$A(a,0)$，且$|AF|=1$.

（Ⅰ）求椭圆C的方程；

（Ⅱ）过点F的直线l(不与x轴重合)交椭圆C于点M、N，直线MA、NA分别与直线$x=4$交于点P、Q，求$\angle PFQ$的大小.

编写 墨相

设计 简印视觉

在北京加油哦