圆锥曲线讲义

目录

I 讲义部分

II 习题部分

讲义部分

CHAPTER 1. 常规计算

1.1 常规计算导读

所谓常规计算，指的是在我们日常做题过程中经常遇到的一些结构，包括：联立直线、韦达化简、代入计算、最值计算等模块. 在平时的解题过程中，我们可能并没有对这些环节进行过反思，而是是按照比较常规的运算逻辑，按部就班地进行运算，但也因此在解题过程中花上不少时间.

在本章中，我们将对上面提到的四个模块进行反思和总结，通过结论的介绍和预算逻辑的阐释，对这四个模块的处理形成体系. 希望通过本章节，能对大家的运算逻辑、运算速度这两个方面能力有所提升.

问题 1.1 — 过程复杂，结果简单. 纵观圆锥曲线大题的解析，常常透着八个字："过程复杂，结果简单"，结合对常规计算过程的观察，我们对同学们提出三个思考问题：

（1）许多项会被消掉：是否能总结出一种运算逻辑，做题时有方法实现能少算就少算?

（2）复杂项优先删除：解题过程式子通常系数大、变量多、次数高，是否有处理思路?

（3）先观察后再计算：联立后的结构是否具有特征? 能否利用这些特征生成一定结论?

带着以上三个思考问题，我们一起对本章进行学习，在过程中希望同学们仔细体会.

1.2 联立直线

简述 在与椭圆相关的大题中，我们会遇到一类与直线和椭圆位置关系相关的问题，通常需要通过将直线与椭圆方式联立进行化简，在本节中，我们将针对"联立直线"这个过程进行更深入的思考，通过计算和说明给出一条我们推荐的化简方法，并进行练习.

目标 在 90 秒内快速写出直线与椭圆联立的过程和结果，并写出判别式.

提示 本部分的内容同学们可以根据自身的情况选择性阅读，推荐暂未能达到"目标"要求的同学们阅读这部分内容.

1.2.1 专题例析

例题 1.1 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 与斜率存在且不为 0 的直线 $l:y=kx+b$ 相交于两点. 将直线与曲线联立并写出判别式. ■

$\boxed{\text{引导}}$ 联立直线是我们非常熟悉的过程，首先我们写出第一步 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ y=kx+m\end{cases}$

接着，有同学肯定迫不及待地想要联立写出式子了，别急！

请你阅读导读给出的问题导学，再思考你接下来的步骤是否能达到我们的目标？

我们说：看到一个式子时，千万不要直接展开进行化简，而是进行观察，预判最终化简的基本构架是什么，然后列出来. 我们往下接着写一步：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(kx+m)^2}{b^2}=1$$

不难想到，我们接下来将这个式子拆开后会得到这样的结果：

$$(\quad)x^2+(\quad)x+(\quad)=0$$

因此，我们此时比较稳妥的措施是，分别求出 $x^2,x,$ 的系数和常数项，算出：

$$x^2:\frac{1}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}\quad x:\frac{2km}{b^2}\quad C:\frac{m^2}{b^2}-1$$

这就有了我们的最终结果：

$$\left(\frac{1}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}\right)x^2+\frac{2km}{b^2}x+\frac{m^2}{b^2}-1=0$$

显然，$\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{k^2}{b^2}\right)$ 恒不为 0，因此该方程为一元二次方程，且

$$\Delta=\left(\frac{2km}{b^2}\right)^2-4\left(\frac{1}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}\right)\left(\frac{m^2}{b^2}-1\right)=4\left(\frac{1}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}-\frac{m^2}{a^2b^2}\right)$$

$\boxed{\text{记忆}}$ 我们先对上述的两个式子进行总结，首先一元二次方程的系数：

$$x^2:\frac{1}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}\quad x:\frac{2km}{b^2}\quad C:\frac{m^2}{b^2}-1$$

（1）对于 x^2 的系数，不难发现保留了本来的二次项，加上消 y 过程中 $y^2\to k^2x^2$，和为

$$\frac{1}{a^2}+\frac{k^2}{b^2};$$

（2）对于 x 的系数，来自完全平方和展开的中间二倍乘积，因此不难想到为 $2km$；

（3）常数项则为直线纵截距平方 m^2 比上分母 b^2 再减去右边的 1，为 $C:\dfrac{m^2}{b^2}-1$.

（4）对于判别式，则可以记为：$4\left(\text{二次项系数}-\dfrac{m^2}{a^2b^2}\right)$.

$\boxed{\text{思考}}$ 假若在联立前就对曲线方程进行通分: $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ y=kx+m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \\ y=kx+m \end{cases}$

此时联立曲线方程与直线方程，得:

$$(b^2+a^2k^2)x^2+2kma^2x+a^2m^2-a^2b^2=0$$

显然，$(b^2+a^2k^2)$ 恒不为 0，因此该方程为一元二次方程，且

$$\Delta=4a^2b^2(b^2+a^2k^2-m^2)$$

此时，虽然该式子比上式要相对简洁，但当 a^2 和 b^2 具有倍数关系时，此处的化简需要考虑约分，如:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1 \Rightarrow 2x^2+4y^2=8$$

同时，此类方程中，$\Delta=4a^2b^2(b^2+a^2k^2-m^2)$ 的化简也要进行约分.

所以，我们推荐不通分所得到的一元二次方程: 即使 a^2 和 b^2 具有倍数关系，对结果也不会有影响. 因此我们可以在熟记和理解该结论的基础上，在后续化简的式子中使用该结论快速写出；同时，在后续的操作过程中我们也无需再把式子拆开——我们将在之后的专题中提到.

1.2.2 习题精选

■ **习题 1.1** 联立下列曲线方程与直线，写出判别式.

（1）$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1 \\ y=kx+m \end{cases}$ 一元二次方程为____________，$\Delta=$____________.

（2）$\begin{cases} \dfrac{x^2}{3}+y^2=1 \\ x=ty+1 \end{cases}$ 一元二次方程为____________，$\Delta=$____________.

（3）$\begin{cases} \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1 \\ y=kx+3 \end{cases}$ 一元二次方程为____________，$\Delta=$____________.

（4）$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+y^2=1 \\ y-1=k(x-1) \end{cases}$ 一元二次方程为____________，$\Delta=$____________. ■

■ **习题 1.2** 已知椭圆方程 $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$，直线 $l: y=x+m$ 交椭圆于不同的两点 A、B，求 m 的取值范围. ■

■ **习题 1.3** 已知椭圆 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$ 与直线 $y=2x+m$ 交于 A，B 两点，求 m 的取值范围. ■

■ **习题 1.4** 若直线$y=kx-2$和椭圆$x^2+9y^2=9$有两个公共点，求k的取值范围. ■

■ **习题 1.5** 设椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$，求直线 $y=k(x-1)$ 与椭圆的位置关系. ■

■ **习题 1.6** 已知直线 $y=kx+2, k\in\mathbb{R}$ 与椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{t}=1$ 恒有公共点, 求 t 的取值范围. ■

■ **习题 1.7 — 2021 天津卷节选.** 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{5}+y^2=1(a>b>0)$，上顶点为 B，右焦点为 F. 若直线 l 与椭圆 C 有唯一的公共点 M，请设出直线并利用判别式刻画这个关系. ■

■ **习题 1.8 — 2021 北京卷节选.** 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 与过定点 $(0,3)$ 的直线 l 相交于 A,B 两点，请联立直线，结合判别式求出直线 l 的斜率的取值范围. ■

■ **习题 1.9 — 2020 北京卷节选.** 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$. 过点 $B(-4,0)$ 的直线 l 交椭圆 C 于点 M,N，当直线斜率存在且非 0 时，联立直线与椭圆写出一元二次方程，并根据判别式确定斜率的取值范围. ■

■ **习题 1.10 — 2008 北京卷节选.** 已知 $\triangle ABC$ 的顶点 A,B 在椭圆 $x^2+3y^2=4$ 上，C 在直线 $l:y=x+2$ 上，且 $AB\parallel l$，设直线 AB 的方程为 $y=x+m$，利用判别式求出 m 的取值范围. ■

1.3 韦达化简

简述 在日常解题过程中，我们会经常遇到一类化简结果可以直接利用韦达进行处理的式子. 在本讲中，我们将对其进行研究.

目标 在 90 秒内快速识别出对称式韦达的条件，并运用本讲所提到的运算逻辑进行化简.

1.3.1 专题例析

在平常的解题过程中，我们经常会遇见这样的结构：

$$(kx_1+m)(kx_2+m)$$

不难发现，这个式子拆开后有四项：

二次项有一项（x_1x_2）、一次项有两项（x_1,x_2）、常数项有一项（m^2），并且一次项系数相同，可以合并为 (x_1+x_2)，所以最终整理的结果如：

$$(\quad)x_1x_2+(\quad)(x_1+x_2)+(\quad)$$

进而我们依次求出二次项、一次项系数和常数项，分别为：

$$k^2,km,m^2$$

最终化简的结果为

$$k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2$$

我们发现这个式子非常简洁，进一步可以直接代入韦达定理：

其中两项以 x_1x_2 和 x_1+x_2 为因式，另一项为常数项（或由其他参数形成的项）.

我们称 $(kx_1+m)(kx_2+m)$ 为对称式. 此类式子的处理我们要注意的是运算的逻辑.

例题 1.2 化简：$(3x_1+2)(3x_2+2)+(2x_1-5)(2x_2-5)=3(x_1+1)(x_2+1)$. ■

解答 对于这个式子，x_1x_2 的系数是 $3^2+2^2-3=10$，x_1+x_2 的系数是 $6-10-3=-7$，常数项为 $4+25-3=26$，所以该式子化简的结果为

$$10x_1x_2-7(x_1+x_2)+26=0$$

提示 不难发现，本题中有三个前面所提的“对称式结构”，因此根据前面讲解部分给出的运算逻辑和顺序，分别求出了二次项、一次项系数和常数项，进而代入进已经一元二次方程的结构即可. 同时，需要等号右边的式子往左边移项时需要改变符号.

1.3.2 习题精选

R 将下列式子以 x_1x_2、x_1+x_2 为主元进行展开.

■ **习题 1.11** $(2x_1+1)(2x_2+1)+(4x_1-3)(4x_2-3)=2(x_1+2)(x_2+2)$. ■

■ **习题 1.12** $(3x_1+2)(2-x_2)+(3x_2+2)(2-x_1)=2(2-x_1)(2-x_2)$. ■

■ **习题 1.13** $(kx_1-1)(kx_2-1)+x_1x_2=0$. ■

■ **习题 1.14** $(3x_1+m)(3x_2+m)+(2x_1+1)(2x_2+1)=0$. ■

■ **习题 1.15** $\dfrac{tx_1+2}{x_1-1}+\dfrac{tx_2+2}{x_2-1}=2$. ■

■ **习题 1.16** $\dfrac{2x_1+3}{3x_1-1}+\dfrac{2x_2+3}{3x_2-1}=3$. ■

■ **习题 1.17** $\dfrac{2x_1+3}{3x_1-1}+\dfrac{2x_2+3}{3x_2-1}=3$ ■

■ **习题 1.18** $\dfrac{y_1}{(ty_1+3)-2}+\dfrac{y_2}{(ty_2+3)-2}=2$. ■

1.4 代入计算

简述 在日常解题过程中，我们会遇到一类化简结果可以直接用韦达进行处理的式子. 在本讲中，我们将提到一条结论以及一种运算逻辑，进而再遇到此类结构时会更加得心应手.

目标 在 180 秒内快速运用本节所学对一类需要用韦达定理处理的式子进行化简.

1.4.1 专题例析

首先我们根据"联立直线"中得到的一元二次方程写出 x_1x_2 和 x_1+x_2 的表达式

$$x_1+x_2=\frac{-\dfrac{2km}{b^2}}{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{k^2}{b^2}}\quad x_1x_2=\frac{\dfrac{m^2}{b^2}-1}{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{k^2}{b^2}}$$

对于式子

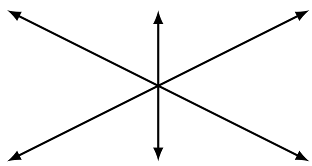
$$(1+k^2)x_1x_2+(kx_1+m)(kx_2+m)=0$$

代入计算得

$$(1+k^2)\left(\frac{m^2}{b^2}-1\right)+km\left(\frac{-2km}{b^2}\right)+m^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}\right)=0$$

观察 我们对这个结构进行观察，不难发现，两边对调，中间取反:

$$\left(\frac{1}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}\right)x^2+\frac{2km}{b^2}x+\frac{m^2}{b^2}-1=0$$



$$(1+k^2)(\frac{m^2}{b^2}-1)+km(\frac{-2km}{b^2})+m^2(\frac{1}{a^2}+\frac{k^2}{b^2})=0$$

1.4.2 习题精选

(R) 请结合本节所学内容结合上述过程进一步进行求解.

■ **习题 1.19** 直线 $l: y=kx+m$ 交椭圆 $\frac{x}{3}+y^2=1$ 于两点 A,B. 若 $m=k$，且 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，求 k 的值 (O 点为坐标原点).

提示 联立直线 $\begin{cases}\frac{x^2}{3}+y^2=1\\ y=kx+m\end{cases} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}+k^2\right)x^2+2kmx+m^2-1=0,$

由韦达定理得 $x_1+x_2=\frac{-2k^2}{3+k^2}$，$x_1x_2=\frac{k^2-1}{\frac{1}{3}+k^2}$，

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(1+k^2)x_1x_2+k^2(x_1+x_2)+k^2$ ■

■ **习题 1.20** 若直线 $l: y=kx+\sqrt{2}$ 与椭圆 $C: \frac{x^2}{4}+y^2=1$ 恒有两个不同的交点 A 和 B, 且 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}>2$ (其中 O 为原点) , 求 k 的取值范围.

提示 联立直线 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1\\ y=kx+\sqrt{2}\end{cases} \Rightarrow \left(\frac{1}{4}+k^2\right)x^2+2\sqrt{2}kx+1=0,$

由韦达定理得 $x_1+x_2=\frac{-2\sqrt{2}k}{\frac{1}{4}+k^2}$，$x_1x_2=\frac{1}{\frac{1}{4}+k^2}$，

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(1+k^2)x_1x_2+\sqrt{2}k(x_1+x_2)+2$ ■

■ **习题 1.21** 若直线 $l: y=kx+m$ 与椭圆 $C: \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 交于 A,B 两点 (不是左右顶点)，P 为椭圆右顶点.$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$ 求证: 直线 l 过定点，并求出该定点的坐标.

$\boxed{\text{提示}}$ 联立直线 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\\ y=kx+m\end{cases} \Rightarrow \left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{k^2}{3}\right)x^2+\dfrac{2km}{3}x+\dfrac{m^2}{3}-1=0$，

由韦达定理得 $x_1+x_2=\dfrac{-\dfrac{2km}{3}}{\dfrac{1}{4}+\dfrac{k^2}{3}}$，$x_1x_2=\dfrac{\dfrac{m^2}{3}-1}{\dfrac{1}{4}+\dfrac{k^2}{3}}$

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(x_1-2)(x_2-2)+y_1y_2=(1+k^2)x_1x_2+(km-2)(x_1+x_2)+m^2+4=0$ ■

■ **习题 1.22** 已知椭圆 $C: \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$，定点 $M(2,0)$，设过点 M 且斜率不为 0 的直线交椭圆 C 于 A,B 两点. x 轴上是否存在定点 P，使 PM 平分 $\angle APB$? 若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，说明理由.

$\boxed{\text{提示}}$ 联立直线 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1\\ x=my+2\end{cases} \Rightarrow \left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{m^2}{4}\right)y^2+\dfrac{4m}{9}y+\left(\dfrac{4}{9}-1\right)=0$，

由韦达定理得 $y_1+y_2=\dfrac{-\dfrac{4m}{9}}{\dfrac{1}{4}+\dfrac{m^2}{4}}$，$y_1y_2=\dfrac{-\dfrac{5}{9}}{\dfrac{1}{4}+\dfrac{m^2}{9}}$，

由 $k_{PA}+k_{PB}=0$，$\dfrac{y_1}{x_1-a}+\dfrac{y_2}{x_2-a}=\dfrac{2my_1y_2+(2-a)(y_1+y_2)}{(my_1+2-a)(my_2+2-a)}=0$，

化简得 $2my_1y_2+(2-a)(y_1+y_2)=0$ ■

■ **习题 1.23** 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，过坐标原点 O 做两条互相垂直的射线，与椭圆分别交于 M，N 两点．求证：点 O 到直线 MN 的距离为定值．（直线 MN 的斜率存在）

$\boxed{\text{提示}}$ 联立直线 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\\ y=kx+m\end{cases} \Rightarrow \left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{k^2}{3}\right)x^2+\dfrac{2km}{3}x+\dfrac{m^2}{3}-1=0$，

由韦达定理得 $x_1+x_2=\dfrac{-\dfrac{2km}{3}}{\dfrac{1}{4}+\dfrac{k^2}{3}}$，$x_1x_2=\dfrac{\dfrac{m^2}{3}-1}{\dfrac{1}{4}+\dfrac{k^2}{3}}$，

由于 $OM\perp ON$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(k^2+1)x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=0$ ■

■ **习题 1.24** 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$，过右焦点的直线 l 交椭圆于 P,Q 两点. 若以 OP，OQ（O 为坐标原点）为邻边的平行四边形是矩形，求满足该条件的直线 l 的方程．

$\boxed{\text{提示}}$ 联立直线 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+y^2=1\\ x=my+1\end{cases} \Rightarrow \left(1+\dfrac{m^2}{2}\right)y^2+my-\dfrac{1}{2}=0$，

由韦达定理得 $y_1+y_2=\dfrac{-m}{1+\dfrac{m^2}{2}}$，$y_1y_2=\dfrac{-\dfrac{1}{2}}{1+\dfrac{m^2}{2}}$，

OP,OQ 为邻边平行四边形是矩形，所以 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=(m^2+1)y_1y_2+m(y_1+y_2)+1=0$ ■

1.5 非对称韦达

简述 在 2020 年高考真题中，全国 I 卷和北京卷均出现了涉及非对称韦达定理的结构，此后一段时间内，这个专题风靡全国. 通过本节的学习，希望同学们遇到此类问题时能够快速识别并生成化简方向.

目标 根据本节所学内容，快速判断非对称韦达的形式，确定化简方向.

1.5.1 专题例析

类型一：$x_1=\lambda x_2$（λ 为一个确定的常数）

处理方法：$\dfrac{x_1}{x_2}=\lambda$，进而 $\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{1}{\lambda}$，所以 $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=\dfrac{(x_1+x_2)^2}{x_1x_2}-2=\lambda+\dfrac{1}{\lambda}$.

例题 1.3 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$，过点 $M(1,0)$ 的直线 l 交椭圆 C 于 A,B 两点，$|MA|=\lambda|MB|$，且当直线 l 垂直于 x 轴时，$|AB|=\sqrt{2}$. 若 $\lambda\in\left[\dfrac{1}{2},2\right]$，求弦长 $|AB|$ 的取值范围. ■

$\boxed{\text{法 1}}$ 当直线 l 斜率为 0 时，容易求得 $\lambda=3+2\sqrt{2}$ 或 $\dfrac{1}{3+2\sqrt{2}}\notin\left[-\dfrac{1}{2},-\dfrac{7}{16}\right]$；

因此，设直线 $l:x=ty+1$，联立 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+y^2=1\\ x=ty+1\end{cases}\Rightarrow\left(1+\dfrac{t^2}{2}\right)y^2+ty-\dfrac{1}{2}=0$，

由 M 在圆内知 $\Delta>0$，由韦达有 $y_1y_2=\dfrac{-\dfrac{1}{2}}{1+\dfrac{t^2}{2}}$，$y_1+y_2=\dfrac{-t}{1+\dfrac{t^2}{2}}$，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$，又因 A,B,M 三点共线，所以有 $\dfrac{y_1}{y_2}=-\lambda$，故

$$-\lambda+\frac{1}{-\lambda}+2=\frac{(y_1+y_2)^2}{y_1y_2}=\frac{4t^2}{-(t^2+2)},$$

由 $\lambda\in\left[\dfrac{1}{2},2\right]$ 不难解出 t 的范围.

$\boxed{\text{法 2}}$ 由 $y_1=-\lambda y_2$，代入韦达得：

$$-\lambda y_2^2=\frac{-\dfrac{1}{2}}{1+\dfrac{t^2}{2}},\quad y_2(1-\lambda)=\frac{-t}{1+\dfrac{t^2}{2}},$$

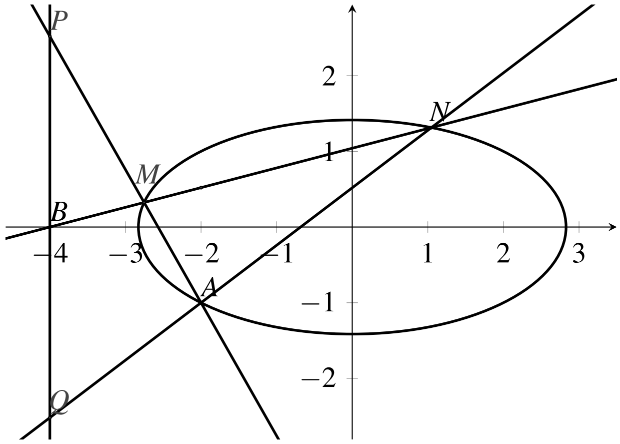
两式相除得 $\dfrac{\lambda}{(1-\lambda)^2}=\dfrac{1+\dfrac{t^2}{2}}{2t^2}$，这样就减少了变量的个数，代入参数范围容易求解.

类型二：$\dfrac{r_1x_1x_2+m_1x_1+n_1x_2+p_1}{r_2x_1x_2+m_2x_1+n_2x_2+p_2}$

处理方法：先猜后证、凑韦达消元、和积转换.

例题 1.4 — 2020 北京卷节选. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$，$A(-2,-1)$，$B(-4,0)$ 的直线 l 交椭圆 C 于点 M,N，直线 MA,NA 分别交直线 $x=-4$ 于点 P,Q. 求 $\dfrac{|PB|}{|BQ|}$. ■

$\boxed{\text{分析}}$ 当同学们在考场上遇到这道题的时候，通常会有两种思路：对于所求 $\dfrac{|PB|}{|BQ|}$，可以直接对两段长度进行代数表示，并直接进行运算，在运算的过程中同学们会遇到一些困难，也就是类型二所给出的形式的非对称韦达结构的处理，这也是这道例题所要涉及的知识点；此外，部分同学可能对“先猜后证”这个思想比较熟悉，可以首先从几何直观中根据一些技巧猜出这个所求的比值，进而将所求式子进行转化，进而回避掉非对称韦达的结构；此外，本题还有一个做法是通过其命题背景“极点极线”进行处理，这个知识点我们会在后续章节进行给出. 下面我们对两种常规思路进行讲解.



$\boxed{\text{法 1}}$ 设直线 $l:x=ty-4$，两交点 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

易得 $l_{AM}:y+1=\dfrac{y_1+1}{x_1+2}(x+2)$，令 $x=-4$ 得 $y_p=-\dfrac{x_1+2y_2+4}{x_1+2}$，同理 $y_Q=-\dfrac{x_2+2y_2+4}{x_2+2}$，

由图不难发现 $\dfrac{|PB|}{|BQ|}=\left|\dfrac{y_P}{y_Q}\right|=\left|\dfrac{-\dfrac{x_1+2y_1+4}{x_1+2}}{-\dfrac{x_2+2y_2+4}{x_2+2}}\right|=\left|\dfrac{(x_1+2y_1+4)(x_2+2)}{(x_2+2y_2+4)(x_1+2)}\right|$，

将 x_1 和 x_2 利用直线 $x=ty-4$ 进行替换得到原式 $=\left|\dfrac{ty_1y_2-2y_1}{ty_1y_2-2y_2}\right|$，不难发现这个式子就是所谓的类型二的结构，其痛点在于我们没有学过对于单独的 y_1 这样的结构的处理. 我们给出以下两个处理角度：

$\boxed{\text{法 1.1}}$ 我们让单独的 y_1 变成我们熟悉的 y_1+y_2，即 $y_1=(y_1+y_2)-y_2$，

这样一来我们可以将原式化为 $\left|\dfrac{ty_1y_2-2(y_1+y_2)+2y_2}{ty_1y_2-2y_2}\right|$，观察上面的式子，我们可以回想到反设直线的初衷之一——可以和积转换，此时我们联立直线：

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1\\ x=ty-4\end{cases}\Rightarrow(\frac{1}{2}+\frac{t^2}{8})y^2-ty+1,y_1+y_2=\frac{t}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{t^2}{8}},y_1y_2=\frac{1}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{t^2}{8}}\Rightarrow y_1+y_2=ty_1y_2$$

因此原式进一步化简为 $\left|\dfrac{ty_1y_2-2ty_1y_2+2y_2}{ty_1y_2-2y_2}\right|=\left|\dfrac{-ty_1y_2+2y_2}{ty_1y_2-2y_2}\right|=1.$

$\boxed{\text{法 1.2}}$ 我们也可以选择将 y_1y_2 之间换成 y_1+y_2，则原式化简为

$$\left|\frac{y_1+y_2-2y_1}{y_1+y_2-2y_2}\right|=\left|\frac{y_2-y_1}{y_1-y_2}\right|=1.$$

我们通常称 $\boxed{\text{法 1.1}}$ 为凑韦达消元、$\boxed{\text{法 1.2}}$ 为和积转换. 其实，两种方法的实质都是和积转换，即通过由直线斜截式（截距为确定的数）与圆锥曲线联立得到的和积具有参数为斜率的倍数关系的式子进行转化. 也即：这个方法的前提是要正确地设直线. 这个内容我们将在后续章节进行讲解.

$\boxed{\text{法 2}}$ 观察上面的图象，我们发现：因为 M,N 是无顺序的，因此当图中 M 和 N 的顺序交换后，P,Q 的标点也会交换，但是 $|PB|$ 和 $|BQ|$ 的长度不会发生改变，因此我们发现这个比例满足

$$\frac{|PB|}{|BQ|}=\frac{|BQ|}{|PB|}=\frac{1}{\dfrac{|PB|}{|BQ|}}\text{，不难发现}\frac{|PB|}{|BQ|}=1\Rightarrow|PB|-|BQ|=0\Rightarrow y_P+y_Q=0.$$

以上介绍的是这个思路的前期处理的一个角度，也可以选择通过特殊值的代入进行计算求得这个比例的值. 这种思路叫作先猜后证法，是对于此类定值定点问题的一种常见的思路. 在本题中，我们通过先猜后证将求 $\left|\dfrac{y_P}{y_Q}\right|$ 转变为证明 $y_P+y_Q=0$，使得思路更加明了，同时回避了非对称韦达的结构.

1.5.2 习题精选

■ **习题 1.25 — 2021 丰台期末节选.** 已知椭圆 $W:\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1$，$A(0,2)$，$B(-3,-1)$. 直线 AB 与 x 轴交于点 $M(m,0)$，过点 M 作不垂直于坐标轴且与 AB 不重合的直线 l，l 与椭圆 W 交于 C,D 两点，直线 AC,BD 分别交直线 $x=m$ 于 P,Q 两点. 证明：$\dfrac{|PM|}{|MQ|}$ 为定值. ■

■ **习题 1.26 — 2021 通州期末节选.** 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的左右顶点为 A,B. 过椭圆 C 的右焦点作斜率不为 0 的直线 l 交椭圆 C 于 M,N 两点，直线 AM,BN 交于点 Q. 证明：点 Q 在直线 $x=4$ 上. ■

■ **习题 1.27 — 2020 全国 I 卷文节选.** 已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$ 的左、右顶点为 A,B，上顶点为 G，P 为直线 $x=6$ 上的动点，PA 与 E 的另一交点为 C，PB 与 E 的另一交点为 D. 证明：直线 CD 过定点. ■

■ **习题 1.28 — 2021 江苏一模节选.** 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 的右焦点 F，过点 $(2,0)$ 的直线 l 与椭圆 C 交点 A,B. 设直线 AB,BF 的斜率分别为 $k_1,k_2(k_2\neq 0)$，证明：$\dfrac{k_1}{k_2}$ 为定值. ■

1.6 最值计算

简述 在圆锥曲线大题最值问题中，通常涉及一个有一定处理技巧要求的式子，需要利用基本不等式、二次函数、导数等工具进行求值. 在本节中我们将对这个内容进行训练.

目标 根据本节所学，在 120 秒对于所要求最值的特定的式子，确定方向并求得最值.

1.6.1 专题例析

$\boxed{1}$ 基本不等式

(1)（2006 北京卷理） $s_it_i=2$，且 $s_i>0,t_i>0(i=1,2)$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}s_1s_2+\frac{1}{2}t_1t_2\geq\sqrt{s_1s_2t_1t_2}=2$，当且仅当 $s_1s_2=t_1t_2$ 即 $\begin{cases}x_1=x_2\\ y_1=-y_2\end{cases}$ 时等号成立.

(2)（2011 北京卷理） $|AB|=\frac{4\sqrt{3}|m|}{m^2+3}=\frac{4\sqrt{3}}{|m|+\frac{3}{|m|}}\leq 2$，当且仅当 $m=\pm\sqrt{3}$ 时等号成立.

(3)（2014 北京卷文） $|AB|^2=\frac{x_0^2}{x}+\frac{8}{x_0^2}+4\geq 4+4=8$，当且仅当 $x_0^2=4$ 时等号成立.

提示 基本不等式是最值运算中最常出现的考察形式. 对于基本不等式的性质，我们需要尤其注意当且仅当“等”的条件下不等式等号成立.

$\boxed{2}$ 二次函数

(1)（2008 北京卷理） $S=\frac{\sqrt{3}}{4}(-3n^2+16)\left(-\frac{4\sqrt{3}}{3}<n<\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$，$S_{max}=4\sqrt{3}$.

(2)（2019 西城一模文） $S_{ABCD}=8\sqrt{\frac{k^2(3k^2+1)}{(4k^2+1)^2}}$，令 $t=4k^2+1$，$S_{ABCD}=2\sqrt{-\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}+3}$，$\left(\frac{1}{t}\in(0,1)\right)$，$S_{ABCD}=2\sqrt{-\left(\frac{1}{t}+1\right)^2+4}\leq 2\sqrt{3}$，$S_{ABCD_{max}}=2\sqrt{3}$.

(3)（2017 西城二模文） $S=\frac{\sqrt{2}}{2}|m|\sqrt{4-m^2}=\frac{2}{2}\sqrt{-(m^2-2)^2+4}\leq\sqrt{2}$.

提示 在一些试题中，我们会遇到根号下具有二次函数形式的结构. 在利用二次函数性质的同时，我们需要注意定义域.

$\boxed{3}$ 分离常数

(1)（2018 延庆一模理） $S=\frac{2k^2+1}{k^2-1}=-2+\frac{3}{1-k^2}\geq 1$.

(2)（2017 东城一模文） $S_{ABCD}=\frac{24(m^2+1)^2}{(2m^2+3)(3m^2+2)}=4\left(1-\frac{m^2}{6m^4+13m^2+6}\right)\leq 4$.

(3)（2017 大兴一模文） $|y_1-t_2|=12\sqrt{\frac{k^4+k^2}{16k^4+24k^2+9}}=12\sqrt{\frac{1}{16}-\frac{\frac{1}{2}k^2+\frac{9}{16}}{16k^4+24k^2+9}}\leq 12\sqrt{\frac{1}{16}}=3$

提示 通过分离常数进行求最值的式子一般分子和分母中含有次数相同的主元.

$\boxed{4}$ **导数**

(1)(2009 年全国 I 卷文) $S^2=(7+2t)^2(7-2t)=-8t^3-28t^2+98t+343(0<t<3.5)$,令 $f(t)=S^2$,$f'(t)=-24t^2-56t+98=-2(2t+7)(6t-7)$,令 $f'(t)=0$,得 $t=\dfrac{7}{6}$ 或 $-\dfrac{7}{2}$(舍). 当 $0<t<\dfrac{7}{6}$ 时,$f'(t)>0$;当 $t=\dfrac{7}{6}$ 时,$f'(t)=0$;当 $\dfrac{7}{6}<t<\dfrac{7}{2}$ 时,$f'(t)<0$. 所以当 $t=\dfrac{7}{6}$ 时,$f(t)$ 有最大值,即四边形 $ABCD$ 的面积最大,此时点 P 的坐标为 $\left(\dfrac{7}{6},0\right)$.

(2)(2017 浙江卷理) $|AP|\cdot|PQ|=-x^4+\dfrac{3}{2}x^2+x+\dfrac{3}{16},x\in\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$,设为 $f(x)$,则 $f'(x)=-4x^3+3x+1=-(x-1)(2x+1)^2$,所以 $f(x)$ 在 $\left(-\dfrac{1}{2},1\right)$ 上单调递减,在 $\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$ 上单调递增,所以 $f(x)_{max}=f(1)=\dfrac{27}{16}$,即 $|AP|\cdot|PQ|$ 的最大值为 $\dfrac{27}{16}$.

$\boxed{\text{提示}}$ 需要通过求导进行求最值的结构特征一般包括主元最高次项大于等于 3 的式子.

$\boxed{5}$ **其他形式**

(1)(2018 北京卷文) $|AB|=\dfrac{\sqrt{6(4-m^2)}}{2}$,$m^2=0$ 时,$|AB|_{max}=\sqrt{6}$.

(2)(2010 北京卷文) $y=2sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$,$\theta\in(0,\pi)$,当 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$,即 $t=\dfrac{1}{2}$ 时,$y_{max}=2$.

(3)(2016 海淀一模理) $2\sqrt{\left(1-\dfrac{4}{x_0}\right)^2-\left(\dfrac{4y_0}{x_0}\right)^2}=2\sqrt{5-\dfrac{8}{x_0}}\leq 2\left(x_0\in\left(\dfrac{8}{5},2\right]\right)$

1.6.2 习题精选

■ **习题 1.29** 求下列式子的最小值

（1）$21k^2+\dfrac{5}{k^2}$；

（2）$\dfrac{k}{21+5k^2}$　　变式：$\dfrac{|k|}{21+5k}$；

（3）$21k^2(5-k^2)$　　变式：$21k\sqrt{5-k^2}$；

（4）$\dfrac{21\sqrt{k^2+1}}{3k^2+7}$.

■

■ **习题 1.30** 求下列式子的最值

（1）$\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{21-m^2}{7}}|m-7|$；　　（2）$(7+2\sqrt{21-m^2})(5m^2-12)$.

■

■ **习题 1.31** 求下列式子的最值

（1）（2020 东城一模）$|CD|=\sqrt{\dfrac{8}{3}+\dfrac{8k^2}{3(2k^2+1)}}$；

（2）（2018 海淀二模理）$S_{OFPT}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\dfrac{x_0^2}{4}+x_0y_0+y_0^2}$，$\dfrac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$；

(3)（2017 平谷一模文） $|OB| = \left|\dfrac{-2y_0^2-3}{2y_0}\right|$;

(4)（2016 顺义一模理） $S_{\triangle AOB} = \dfrac{1}{2}\sqrt{1+k^2}\cdot 4\cdot\sqrt{\dfrac{1+4k^2-m^2}{(1+4k^2)^2}}\cdot\dfrac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$，$m\in(-6,0)$.

(5)（2016 石景山一模） $S_{\Delta AOB} = \dfrac{1}{2}\sqrt{4m-2m^2}$，$m\in(0,2)$.

■

■ **习题 1.32** 求式子 $\dfrac{x^4}{4p^2}-2px+2p^2$ 的最值.

■

■ **习题 1.33 — 2020 联赛一试 A 卷 11 题.** 求下面式子的最值 $\dfrac{(m^2+1)^3}{m(m^2-1)^2}$. ■

1.7 知识总结

1 联立直线

联立直线 $y=kx+m$，椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ y=kx+m\end{cases}$ $\Rightarrow$ 消 y 得：

$$\left(\frac{1}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}\right)x^2+\frac{2km}{b^2}x+\frac{m^2}{b^2}-1=0$$

显然，$\left(\frac{1}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}\right)$ 恒不为 0，因此该方程为一元二次方程，且

$$\Delta=\left(\frac{2km}{b^2}\right)^2-4\left(\frac{1}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}\right)\left(\frac{m^2}{b^2}-1\right)=4\left(\frac{1}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}-\frac{m^2}{a^2b^2}\right)$$

2 韦达化简

对于形如 $(kx_1+m)(kx_2+m)$ 这样的对称式，我们给出相应的运算逻辑：

写出结构 $\Rightarrow$ 求出二次项和一次项系数、常数项 $\Rightarrow$ 写出结果.

3 代入计算

我们会发现这样的情况，在根据几何条件化简之后，我们可以整理出一个这样的式子

$$(1+k^2)x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=0$$

不难想到，接下来需要代入韦达定理的结果进行进一步操作，我们给出此部分：
结合之前求得的一元二次方程

$$\left(\frac{1}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}\right)x^2+\frac{2km}{b^2}x+\frac{m^2}{b^2}-1=0$$

写出韦达定理的结论

$$x_1+x_2=\frac{-\frac{2km}{b^2}}{\frac{1}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}}\quad x_1x_2=\frac{\frac{m^2}{b^2}-1}{\frac{1}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}}$$

下面我们给出将该式代入对称式，给出结果：

$$\left(1+k^2\right)\frac{\frac{m^2}{b^2}-1}{\frac{1}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}}+km\cdot\frac{-\frac{2km}{b^2}}{\frac{1}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}}+m^2=0$$

进一步，我们对等式两边同时乘以 $\frac{1}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}$，得

$$(1+k^2)\left(\frac{m^2}{b^2}-1\right)+km\left(\frac{-2km}{b^2}\right)+m^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}\right)=0$$

对于这个式子，我们想要体现的依然是计算的逻辑性. 让我们再翻回到章头，默念一遍三个考量，此时我们进一步思考：复杂项优先删掉——如本题中 $\frac{k^2m^2}{b^2}$ 可以删除，第一项中还剩下 $-1-k^2+\frac{m^2}{b^2}$，第二项被删去，第三项还剩下 $\frac{m^2}{a^2}$，因此最后得到结果：

$$-1-k^2+\frac{m^2}{b^2}+\frac{m^2}{a^2}=0$$

$\boxed{4}$ 最值计算

（1）基本不等式：基本不等式是最值运算中最常出现的考察形式. 对于基本不等式的性质，我们需要尤其注意当且仅当“等”的条件下不等式等号成立.

（2）二次函数：在一些试题中，我们会遇到根号下具有二次函数形式的结构. 在利用二次函数性质的同时，我们需要注意定义域.

（3）分离常数：需要通过分离常数进行求最值的式子在分子和分母中有次数和数量相同的主元.

（4）导数法：需要通过求导进行求最值的结构特征一般包括主元最高次项大于等于 3 的式子.

$\boxed{5}$ 非对称韦达

（1）类型一：$x_1=\lambda x_2$（λ 为一个确定的常数）

处理方法：$\frac{x_1}{x_2}=\lambda$，进而 $\frac{x_2}{x_1}=\frac{1}{\lambda}$，所以 $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=\frac{(x_1+x_2)^2}{x_1x_2}-2=\lambda+\frac{1}{\lambda}$.

（2）类型二：$\frac{r_1x_1x_2+m_1x_1+n_1x_2+p_1}{r_2x_1x_2+m_2x_1+n_2x_2+p_2}$

处理方法：先猜后证、凑韦达消元、和积转换.

CHAPTER 2. 设参训练

2.1 设参训练导读

正如北京市教科院对 2021 年高考真题作出的评价:“第（20）题考查了解析几何中的主要方法，需要学生具备一定的数学运算核心素养”，圆锥曲线大题是高考中一道体现“数学运算”核心素养的试题，通俗地说：具有一定的运算量. 圆锥曲线大题中通常涉及众多几何要素、有着复杂的结构关系、一定的代数变形技巧，同学们往往因此陷入了计算下去的畏难情绪. 我们分析：这其中重要的遇阻因素在于同学们对设参数的方案和方法并不熟悉：是直接采用斜率作参量设直线？还是用点的坐标作参量进行求解？如果选择了设点和设直线，如何设出？在以往做题的过程中，同学们也许并不曾仔细思量过. 在本章节的学习中，我们将对此进行分析和讲解.

问题 2.1 — 问题导学：设参前需要厘清的问题.

1. 何种情况下设点？何种情况下设直线?
2. 当选定了设直线或点后，是否有一定的形式，能对计算进行进一步的简化?

2.2 知识讲解

简述 设参是圆锥曲线大题中的一个重要环节，其方案和方法直接地决定了我们解题过程的运算逻辑和计算量. 设参包括两个方向：设点、设直线. 通常同学们在解题的过程可能会感受到这两个设法对一道试题运算量有些影响，但也许又说不出怎样选择会使得运算更流畅. 因此，本章中我们将会从设参的方案、设参的方法两个维度进行讲解，希望同学们通过本章节的讲解和训练对设参有进一步的体会，在解题过程中能快速选择出正确的设参时机，判断出流畅的设参方案和方法.

目标 通过本专题的学习，对引参的时机、方案和方法熟练掌握，在解题中能灵活运用.

2.2.1 方法概观

核心原则——设而不求

标志	对称		非对称/强相关	
类型	直线		点	
特征	过定点 $(n,0)$	其他情况	略	
内容	$x=ty+n$	$y=kx+m$	(x,y)	$(acos\theta,bsin\theta)$
细节	讨论平行于 x 轴	讨论斜率不存在	二次曲线上的点优先	

2.2.2 典型例题

例题 2.1 — 设直线的方法.

（1）已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，过点 $P(4,0)$ 的直线 l 与椭圆交于 A,B 两点，设点 B 关于 x 轴的对称点为 N，求证：直线 AN 过定点.

（2）已知椭圆 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$，过椭圆右焦点 $F(1,0)$ 的直线与椭圆交于 A，B. 设 C 是直线 $x=2$ 上的一点，且满足 $CF\perp AB$，若 $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BC}$（其中 O 为坐标原点），求四边形 $OACB$ 的面积. ■

$\boxed{\text{识别}}$（1）本小题的条件显然能构成对称式，因此我们选择设直线. 同时发现定点 $P(4,0)$ 在 x 轴上，所以我们选择设直线 $l:x=ty+4$.

（2）本小题中直线定点 $F(1,0)$ 在 x 轴上，因此我们设直线 $l:x=ty+1$. 同时，根据题意：我们要求的四边形 $OACB$ 面积 $S_{OACB}=2S_{OAB}=2\times\dfrac{1}{2}\times|OF|\times|y_1-y_2|$，需要用到 A,B 两点纵坐标的距离，因此知要通过消 x 来得到 $|y_1-y_2|$.

$\boxed{\text{解答}}$（1）当斜率为 0 时，t 不存在，此时 $l_{AN}:y=0$，

当斜率不为 0 时，设直线 $l:x=ty+4$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+y^2=1\\ x=ty-4\end{cases}\Rightarrow\left(1+\dfrac{t^2}{4}\right)y^2+2ty+\dfrac{16}{4}-1=0$，$\Delta=4\left(1+\dfrac{t^2}{4}-\dfrac{16}{4}\right)>0$，

由韦达定理得 $y_1+y_2=\dfrac{-2t}{1+\dfrac{t^2}{4}}$，$y_1y_2=\dfrac{3}{1+\dfrac{t^2}{4}}$，

所以$l_{AN}:y-y_1=\dfrac{y_1+y_2}{x_1-x_2}(x-x_1)$，令$y=0$，得$x=\dfrac{x_1y_2+y_1x_2}{y_1+y_2}=\dfrac{2ty_1y_2+4(y_1+y_2)}{y_1+y_2}$

$$=\frac{32t+4(-2t)}{-2t}=\frac{-2t}{-2t}=1.$$

（2）设 $l_{AB}:x=ty+1$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

由 $CF_2\perp AB$，知：$l_{CF_2}:y=-t(x-1)$，$C(2,-t)$，

联立 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1\\ x=ty+1\end{cases}\Rightarrow\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{t^2}{3}\right)y^2+\dfrac{2t}{3}y+\dfrac{1}{3}-1=0$，$\Delta=4\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{t^2}{3}-\dfrac{1}{6}\right)$，

由韦达定理得 $y_1+y_2=\dfrac{-\dfrac{2t}{3}}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{t^2}{3}}$，$y_1y_2=\dfrac{\dfrac{1}{3}-1}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{t^2}{3}}$，

因为 $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BC}$，所以 $OACB$ 为平行四边形，$(x_1,y_1)=(2-x_2,-t-y_2)$，$\begin{cases}x_1+x_2=2\\y_1+y_2=-t\end{cases}$，

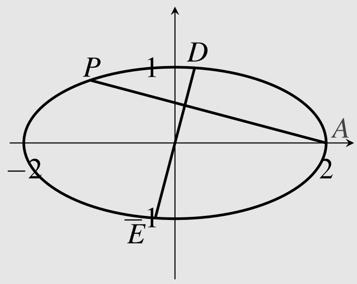
不难求得 $x_1+x_2=t(y_1+y_2)+2=\dfrac{1}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{t^2}{3}}$，解得 $t=0$，$y_1+y_2=0$，$y_1y_2=\dfrac{4}{3}$，

$S_{OACB}=2S_{OAB}=2\times\dfrac{1}{2}\times|OF|\times|y_1-y_2|=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

分析 （1）本题中采取 $x=ty+4$ 设法好处在于：首先，联立直线后得到的式子中不含参，利于用韦达定理得到的积式 y_1y_2 分子为常数 3；其次，不难发现在最后一步运算中，当我们代入韦达所得式子进行化简时，分子分母中参数 t 从始至终都是一次，运算量较小.

（2）本题中我们设直线角度的因素包括直线所过定点位置和题设两个方面.

例题 2.2 — 设点还是设线（2019 北京四中开学考理节选）. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，$A(2,0)$，O 为坐标原点. 若 P（异于点 A）为椭圆 C 上一个动点，过 O 作线段 AP 的垂线 l 交椭圆 C 于点 E,D，求 $\dfrac{|DE|}{|AP|}$ 的取值范围.



识别 本题中，定点 A 与曲线上的动点 P 生成了题设中的另外两点 D 和 E，因此动点 P 是一个与另两点强相关的点. 同时，我们发现椭圆方程中的“a^2”和“b^2”均为整数，因此我们设 $P(2cos\theta,sin\theta)$. 另外，设直线 AP 的方程也能做出本题，我们在法 2 中给出了过程. 然而，观察 < 法 1> 和 < 法 2> 最后求最值的式子，不难发现 < 法 2> 的结构相对复杂一些.

解答 < 法 1> 设 $P(2cos\theta,sin\theta)$，则 $|AP|=\sqrt{(2cos\theta-2)^2+sin^2\theta}$，$|DE|=\sqrt{1+\dfrac{4(1-cos\theta)^2}{sin^2\theta}}2|X_D|$，

①$sin\theta=0$，$|AP|=4$，$|DE|=2$，所以 $\dfrac{|DE|}{|AP|}=\dfrac{1}{2}$；

②$sin\theta\neq0$，$k_{DE}=\dfrac{sin\theta}{2cos\theta-2}\Rightarrow k_{DE}=\dfrac{2(1-cos\theta)}{sin\theta}$，所以 $l_{DE}:y=\dfrac{2(1-cos\theta)}{sin\theta}x$，

联立 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+y^2=1\\y=\dfrac{2(1-cos\theta)}{sin\theta}x\end{cases}\Rightarrow\left[\dfrac{1}{4}+\dfrac{4(1-cos\theta)^2}{sin\theta}\right]x^2=1\Rightarrow|x_D|=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{4(1-cos\theta)^2}{sin\theta}}}$，

所以$\dfrac{|DE|}{|AP|}=\dfrac{2\sqrt{\dfrac{1+4(1+cos\theta)^2}{sin^2\theta}}}{\sqrt{\dfrac{sin^2\theta+16(1-cos\theta)^2}{4sin\theta}}\sqrt{4(1-cos\theta)^2+sin^2\theta}}$

$=\dfrac{4}{\sqrt{sin^2\theta+16(1-cos\theta)^2}}$

$=\dfrac{4}{\sqrt{15cos^2\theta-32cos\theta+17}}$

因为 $cos\theta\in[-1,1]$，所以 $\dfrac{DE}{AP}\in\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

< 法 2>①当 AP 斜率为 0，$|AP|=4$，$|DE|=2$，所以 $\dfrac{|DE|}{|AP|}=\dfrac{1}{2}$;

②当 AP 斜率不为 0 设 $l_{AP}:y=k(x-2)$，联立 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+y^2=1\\ y=k(x-2)\end{cases}$

$\Rightarrow\left(\dfrac{1}{4}+k^2\right)x^2-4k^2x+4k^2-1=0$，$\Delta=4\left(\dfrac{1}{4}+k^2-k^2\right)=1$，

$|AP|=\sqrt{1+k^2}\dfrac{\sqrt{\Delta}}{\left|\dfrac{1}{4}+k^2\right|}=\sqrt{1+k^2}\dfrac{\sqrt{1}}{\dfrac{1}{4}+k^2}=\dfrac{4\sqrt{1+k^2}}{1+4k^2}$,

$l_{DE}:y=-\dfrac{1}{k}x$，联立 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+y^2=1\\ y=-\dfrac{1}{k}x\end{cases}\Rightarrow\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{k^2}\right)x^2-1=0$，$\Delta=4\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{k^2}\right)$,

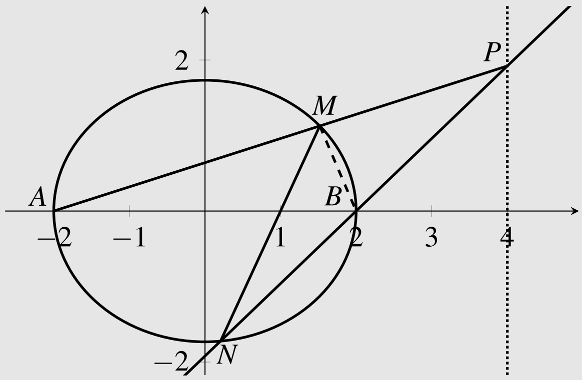
$|DE|=\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}}\dfrac{\sqrt{\Delta}}{\left|\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{k^2}\right|}=\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}}\dfrac{\sqrt{4\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{k^2}\right)}}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{k^2}\right)^2}}=\sqrt{\dfrac{16\left(1+\dfrac{1}{k^2}\right)}{1+\dfrac{4}{k^2}}}=4\sqrt{\dfrac{k^2+1}{k^2+4}}$,

所以 $\dfrac{|DE|}{|AP|}=\dfrac{\dfrac{4\sqrt{k^2+1}}{\sqrt{k^2+4}}}{\dfrac{4\sqrt{1+k^2}}{1+4k^2}}=\dfrac{1+4k^2}{\sqrt{k^2+4}}=\dfrac{4(k^2+4)-15}{\sqrt{k^2+4}}=4\sqrt{k^2+4}-\dfrac{15}{\sqrt{k^2+4}}$,

因为 $\sqrt{k^2+4}>2$，所以 $\dfrac{|DE|}{|AP|}\in\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

说明 在本题 < 法 2> 中，我们使用到弦长公式，弦长 $=\sqrt{1+k^2}\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|\text{二次项系数}|}$，这里不做过多阐述，我们将在后续章节提到.

例题 2.3 — 所设点的位置. 设 A,B 分别是椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的左右顶点，设 P 为直线 $x=4$ 上不同于 $(4,0)$ 的任意一点，且直线 AP,BP 分别于椭圆相交于 M,N. 求证：点 B 在以 MN 为直径的圆内.



■

识别 本题中，我们通过条件转化"点 B 在以 MN 为直径的圆内 $\Leftrightarrow \angle MBN$ 为钝角 $\Leftrightarrow \angle MBP$ 为锐角 $\Leftrightarrow \overrightarrow{BM}\overrightarrow{BP}>0$"，进而想到设点和设直线两种思路均可解决问题."解答"中三种方法分别采取了设直线、设直线上的点、设二次曲线上的点三种设点法.< 法 1> 中采用的设直线 AP 斜率 k 和 < 法 2> 中采取的设点 P 的坐标，其实归根结底都是为了写出直线 AP 的方程，通过将直线与圆锥曲线联立得到二次函数，进而利用韦达定理达到设而不求的效果. **而 < 法 3> 设出圆锥曲线上的点 M，完美地规避掉了联立直线的过程，进而大大地减少了计算量，这也是我们在本题中所推荐的方法.**

解答 点 B 在以 MN 为直径的圆内 $\Leftrightarrow \angle MBN$ 为钝角 $\Leftrightarrow \angle MBP$ 为锐角 $\Leftrightarrow \overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BP}>0$

< 法 1> 由题，设直线 $l_{AP}: x=ty-2$，令 $x=4$ 得 $y=\dfrac{6}{t}$，$P(4,\dfrac{6}{t})$，

联立 $\begin{cases} x=ty-2 \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1 \end{cases} \Rightarrow \left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{t^2}{4}\right)y^2-ty=0$，

由韦达定理得 $y_M+y_A=\dfrac{t}{\dfrac{1}{3}+\dfrac{t^2}{4}}=\dfrac{12t}{4+3t^2}$，$y_A=0$，所以 $y_M=\dfrac{12t}{4+3t^2}$，

$$\begin{aligned}
\text{所以}\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BP} &= (x_M-2,y_M)\cdot\left(2,\frac{6}{t}\right) \\
&= 2\left(\frac{12t^2}{4+3t^2}-4\right)+\frac{12t}{4+3t^2}\cdot\frac{6}{t} \\
&= \frac{24t^2}{4+3t^2}-8+\frac{72}{4+3t^2} \\
&= \frac{24t^2-8(4+3t^2)-72}{4+3t^2}>0
\end{aligned}$$

即 $\angle MBP$ 为锐角，$\angle MBN$ 为钝角，所以点 B 在以 MN 为直径的圆内.

< 法 2> 由 $A(-2,0)$，$B(2,0)$，$P(4,y_0)$，$k_{AP}=\dfrac{y_0}{6}$，所以 $l_{AP}: y=\dfrac{y_0}{6}(x+2)$，

联立 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\\ y=\dfrac{y_0}{6}(x+2)\end{cases} \Rightarrow \left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{y_0^2}{108}\right)x^2+\dfrac{y_0^2}{27}x+\dfrac{y_0^2}{27}+\left(\dfrac{y_0^2}{27}-1\right)=0$，

由韦达定理得 $x_Ax_M=\dfrac{\dfrac{y_0^2}{27}-1}{\dfrac{1}{4}+\dfrac{y_0^2}{108}}$，又 $A(-2,0)$，$x_M=\dfrac{54-2y_0^2}{27+y_0^2}$，

所以有：
$$\begin{aligned}\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BP}&=(x_M-2,y_M)\cdot(2,y_0)\\&=2(x_M-2)+y_0y_M\\&=2(x_M-2)+y_0\cdot\frac{y_0}{6}(x_M+2)\\&=2\frac{-4y_0^2}{27+y_0^2}+\frac{y_0^2}{6}\cdot\frac{108}{27+y_0^2}\\&=\frac{10y_0^2}{27+y_0^2}>0\end{aligned}$$

即 $\angle MBP$ 为锐角，$\angle MBN$ 为钝角，所以点 B 在以 MN 为直径的圆内.

<法 3> 设 $M(x_0,y_0)$，则有 $\dfrac{x_0^2}{4}+\dfrac{y_0^2}{3}=1$，设 $P(x_1,y_1)$，

因为 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AP}$，所以 $(x_0+2,y_0)=\lambda(x_1+2,y_1)\Rightarrow\dfrac{x_0+2}{x_1+2}=\dfrac{y_0}{y_1}=\lambda(x_0\neq\pm2,y_0\neq0)$，

由 P 在直线 $x=4$ 知 $x_1=4$，解得 $y_1=\dfrac{6y_0}{x_0+2}$，$P\left(4,\dfrac{6y_0}{x_0+2}\right)$，

所以 $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BP}=(x_0-2,y_0)\cdot\left(2,\dfrac{6y_0}{x_0+2}\right)=\dfrac{2}{x_0+2}(x_0^2-4+3y_0^2)$，

又有 $\dfrac{x_0^2}{4}+\dfrac{y_0^2}{3}=1$，即 $y_0^2=\dfrac{3}{4}(4-x_0^2)$，

所以 $\overrightarrow{BM}\overrightarrow{BP}=\dfrac{2}{x_0+2}\left[x_0^2-4+\dfrac{9}{4}(4-x_0^2)\right]=\dfrac{5}{2}(2-x_0)>0$，

即 $\angle MBP$ 为锐角，$\angle MBN$ 为钝角，所以点 B 在以 MN 为直径的圆内.

2.3 习题精选

R 阅读三组题目，快速判断设参的方法并写出关键步骤. 这部分试题同学们写出设参的过程即可，不需要将整题解完.

2.3.1 题组 1

■ **习题 2.1 — 2021 北京卷节选.** 已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$，$A(0,-2)$，过 $P(0,-3)$ 的直线 l 斜率为 k，交椭圆 E 于不同的两点 B,C，直线 AB,AC 交 $y=-3$ 于点 M,N. 若 $|PM|+|PN|\leq 15$，求 k 的取值范围. ■

■ **习题 2.2 — 2020 北京卷节选.** 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$，$A(-2,-1)$，过 $B(-4,0)$ 的直线 l 交椭圆 C 于点 M,N. 直线 MA,NA 分别交直线 $x=-4$ 于点 P,Q，求 $\dfrac{|PB|}{|BQ|}$ 的值. ■

■ **习题 2.3 — 2019 北京卷文节选.** 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$，$A(0,1)$，直线 $l:y=kx+t(t\neq\pm1)$ 与椭圆 C 交于两个不同点 P,Q，直线 AP 与 x 轴交于点 M，直线 AQ 与 x 轴交于点 N.
若 $|OM||ON|=2$，求证：直线 l 经过定点.（其中 O 为原点）. ■

■ **习题 2.4 — 2018 北京卷文节选.** 已知椭圆 $M:\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$，斜率为 k 的直线 l 与椭圆 M 有两个不同的交点 A,B，设 $P(-2,0)$，直线 PA 与椭圆 M 的另一个交点为 C，直线 PB 与椭圆 M 的另一个交点为 D. 若 C,D 和点 $Q\left(-\dfrac{7}{4},\dfrac{1}{4}\right)$ 共线，求 k. ■

■ **习题 2.5 — 2017 北京卷文节选.** 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，$A(-2,0)$，$B(2,0)$，点 D 为 x 轴上一点，过 D 作 x 轴的垂线交椭圆 C 于不同的两点 M,N ，过 D 作 AM 的垂线交 BN 于点 E. 求证: $\triangle BDE$ 与 $\triangle BDN$ 的面积之比为 $4:5$. ■

■ **习题 2.6 — 2016 北京卷文节选.** 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，$A(2,0)$，$B(0,1)$，设 P 为第三象限内一点且在椭圆 C 上，直线 PA 与 y 轴交于点 M ，直线 PB 与 x 轴交于点 N . 求证: 四边形 $ABNM$ 的面积为定值. ■

■ **习题 2.7 — 2015 北京卷理节选.** 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$, $P(0,1)$, 椭圆上一点 $A(m,n)(m\neq 0)$, 直线 PA 交 x 轴于点 M. 设 O 为原点，点 B 与点 A 关于 x 轴对称，直线 PB 交 x 轴于点 N. 问: y 轴上是否存在点 Q ，使 $\angle OQM=\angle ONQ$? 存在，求点 Q 坐标；不存在，说明理由. ■

■ **习题 2.8 — 2014 北京卷理节选.** 已知椭圆 $C:x^2+2y^2=4$. 设 O 为坐标原点，若点 A 在椭圆 C 上，点 B 在直线 $y=2$ 上，且 $OA\perp OB$ 求直线 AB 与圆 $x^2+y^2=2$ 的位置关系，并证明你的结论. ■

■ **习题 2.9 — 2011 北京卷文节选.** 已知椭圆 $G:\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1$，斜率为 1 的直线 l 与椭圆 G 交于 A,B 两点，以 AB 为底边作等腰三角形，顶点 $P(-3,2)$. 求 $\triangle PAB$ 的面积. ■

■ **习题 2.10 — 2008 北京卷文节选.** 已知 $\triangle ABC$ 的顶点 A,B 在椭圆 $x^2+3y^2=4$ 上，C 在直线 $l: y=x+2$ 上，且 $AB \parallel l$. 当 $\angle ABC = 90°$，且斜边 AC 的长最大时，求 AB 所在直线的方程.
■

2.3.2 题组 2

■ **习题 2.11 — 2021 西城一模节选.** 已知椭圆 $C: \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，点 $E\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$，左顶点为 D，右焦点为 F. 已知直线 $y=kx+1$ 与椭圆 C 交于 A,B 两点. 过点 B 作直线 $y=t(t>\sqrt{3})$ 的垂线，垂足为 G. 是否存在常数 t，使得直线 AG 经过 y 轴上的定点? 若存在，求 t 的值；若不存在，请说明理由. ■

■ **习题 2.12 — 2021 海淀一模节选.** 已知椭圆 $M: \dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，$A(-2,0)$，$B(0,1)$，设椭圆右顶点为 C，点 P 在椭圆上 (不与椭圆 M 的顶点重合)，直线 AB 与直线 CP 交于点 Q，直线 BP 交 x 轴于点 S. 求证: 直线 SQ 过定点. ■

■ **习题 2.13 — 2021 朝阳一模节选.** 已知椭圆 $C: \dfrac{x^2}{3}+y^2=1$，$A(0,1)$，$B(0,-1)$，若点 M 为椭圆 C 上异于 AB 的任意一点，过原点且与直线 MA 平行的直线与直线 $y=3$ 交于点 P，MB 与 $y=3$ 交于点 Q. 试判断以线段 PQ 为直径的圆是否过定点? 若过定点，求出定点的坐标；若不过定点，请说明理由. ■

■ **习题 2.14 — 2021 平谷一模节选.** 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1(a>b>0)$ ，$P(0,\sqrt{3})$. 设过点 P 的直线与 x 轴交于 N 点，与椭圆的另一个交点为 B ，点 B 关于 x 轴的对称点为 B' ，直线 PB' 交 x 轴于点 M . 求证: $|OM|\cdot|ON|$ 为定值. ■

■ **习题 2.15 — 2021 延庆一模节选.** 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1(a>b>0)$ ，点 $P\left(1,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. 设 AB 是经过椭圆右焦点 F 的一条弦 (不经过点 P 且 A 在 B 的上方)，直线 AB 与直线 $x=2$ 相交于点 M . 记 PA,PB,PM 的斜率分别为 k_1,k_2,k_3，将 k_1,k_2,k_3 如何排列构成一个等差数列，证明你的结论. ■

■ **习题 2.16 — 2021 东城二模节选.** 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的右焦点为 F ，左，右顶点分别为 A,B，设过 $P(2,1)$ 的直线 l 与椭圆 C 交于不同的两点 M,N 过点 N 作 x 轴的垂线，与直线 BM 交于点 D,E 为线段 DN 的中点. 证明: 直线 BE 的斜率为定值. ■

■ **习题 2.17 — 2021 西城二模节选.** 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{3}=1$ ，其长轴的两个端点分别为 A,B. 点 P 为椭圆上除 A,B 外的任意一点，直线 AP 交直线 $x=4$ 于点 E ，点 O 为坐标原点，过点 O 且与直线 BE 垂直的直线记为 l ，直线 BP 交 y 轴于点 M ，交直线于点 N ，求 $\triangle BMO$ 与 $\triangle NMO$ 的面积之比. ■

■ **习题 2.18 — 2021 海淀二模节选.** 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，$F_1,F_2$ 为椭圆的左、右焦点，E 是椭圆上的一点.M,N 是 y 轴上的两个动点（点 M 与点 E 位于 x 轴的两侧），$\angle MF_1N=\angle MEN=90^\circ$，直线 EM 交 x 轴于点 P，求 $\dfrac{|EP|}{|PM|}$ 的值. ■

■ **习题 2.19 — 2021 丰台二模节选.** 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$, 过点 $(-1,0)$ 的直线交椭圆 C 于点 A,B. 在 x 轴上是否存在定点 P, 使 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 为定值? 若存在, 求点 P 的坐标及 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的值; 若不存在说明理由. ■

■ **习题 2.20 — 2021 顺义二模节选.** 已知椭圆 $G:\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$. 过点 $M(0,1)$ 且斜率为 $k(k\neq 0)$ 的直线 l 交椭圆 G 于 A,B 两点, 在 y 轴上是否存在点 N 使得 $\angle ANM=\angle BNM$ （点 N 与点 M 不重合）? 若存在，求出点 N 的坐标；若不存在，请说明理由. ■

2.3.3 题组 3

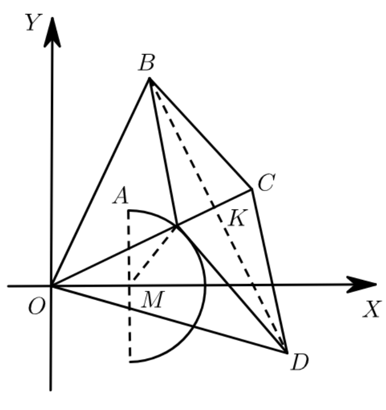
■ **习题 2.21 — 2016 北京卷理节选.** 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1(a>b>0)$ 的右顶点 A 上顶点 B. 设 P 是椭圆 C 上的一点, 直线 PA 与 y 轴交于点 M, 直线 PB 与 x 轴交于点 N，求证: $|AN|\cdot|BM|$ 为定值. ■

■ **习题 2.22 — 2015 北京卷文节选.** 已知椭圆 $C: x^2+3y^2=3$, 过点 $D(1,0)$ 且不过点 $E(2,1)$ 的直线与椭圆 C 交于 AB 两点, 直线 AE 与直线 $x=3$ 交于点 M. 试判断直线 BM 与直线 DE 的位置关系, 并说明理由. ■

■ **习题 2.23 — 2010 北京卷文节选.** 已知椭圆 $C: \dfrac{x^2}{3}+y^2=1$ ，直线 $y=t$ 与椭圆 C 交于不同的两点 M,N, 以线段 MN 为直径作圆 P, 圆心为 P. 设 $Q(x,y)$ 是圆 P 上的动点, 当 t 变化时, 求 y 的最大值. ■

■ **习题 2.24 — 2018 海淀二模理节选.** 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，F 为右焦点，圆 $O: x^2+y^2=1$，P 为椭圆 C 上一点，且 P 位于第一象限，过点 P 作 PT 与圆 O 相切于点 T，使得点 F,T 在 OP 两侧. 求四边形 $OFPT$ 面积的最大值. ■

■ **习题 2.25 — 2012 联赛一试 11 题节选.** 如图，在平面直角坐标系 XOY 中，菱形 $ABCD$ 的边长为 4，且 $|OB|=|OD|=6$，当点 A 在半圆 $(x-2)^2+y^2=4(2\geq x\geq 4)$ 上运动时，求点 C 的轨迹.



■

2.4 知识总结

1 设参方案

当我们在进行条件翻译时，首先会关注条件中圆锥曲线上的点是否对称或成对出现.

如果是，我们就会考虑“设线法”. 所谓“设线法”，即以线为源，利用方程思想，将直线和圆锥曲线联立构建一元二次方程，进而利用韦达定理解决问题，以达到设而不求的目的，简化了计算. 注意：韦达定理的条件是式子要对称，所以圆锥曲线上的已知点也应当是对称的. **如果不是**，我们就会考虑“设点法”. 所谓“设点法”，即以点为源，设出直线或圆锥曲线上点的坐标，利用点的坐标作为参数来解决问题. 这种方法通常不需要将直线与圆锥曲线进行联立. 通常我们会在这两种情况下设点：其一是图形非对称，其二是与其他点强相关. 同时，我们说：在选点的时候，优先选取二次曲线上的点，此来会对计算有进一步的简化.

2 设参方法

1. 设点的方法

当我们采取“设点法”时，在整个解题过程中，动点的坐标贯穿始终. 题目几何条件的代数转化，结论的直线方程的表示，都依赖动点坐标.

在用“设点法”解题的过程中，要始终具有目标意识，用敏锐的观察力，分析条件和目标的差异，用动点坐标作为参数去表示其他的点、线或几何量，并要充分利用动点坐标满足曲线方程的条件，及时进行有效地化简调整 (常用平方及 x_i, y_i 的切换)，将条件不断向目标转化，推进解题过程，这是“设点法”的大致解题模式.

我们对“设点法”给出以下两个提示：

（1）二次曲线上的点优先于直线上的点：设直线上的点本质在于通过直线上的点的坐标表示直线斜率，进而联立直线运用韦达定理. 这与设直线就无异了.

（2）三角换元：椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上的点可以表示为 $\begin{cases} x=bcos\theta \\ y=asin\theta \end{cases}$ (θ为参数).

2. 设直线的方法

设直线方程的目的在于引入参数，进行代数运算. 这一步的精华在于：如何引入参数才能使运算过程尽可能的简洁. 很大程度上，这一步决定了后面的计算量.

一般来说直线的设定依据以下三个条件：已知中是否给出?（如果给出则直接使用）. 是否过坐标轴上的定点? 椭圆方程中 x^2, y^2 分母谁大?

（1）若题目中没给出直线形式，过 x 轴定点或 x^2 分母较大时，反设直线 $x=ty+n$.

这种设法的好处在于：①核心条件表示成纵坐标更好——计算量小；②所设直线的斜率可以不存在——不用讨论；③直线过轴上的定点——联立简单.

提示：如果计算过程中，发现此设法较麻烦，立刻转用传统设法. 此外，此设法一定要先关注 m 不存在——直线平行于 x 轴的情况.

（2）如果题目中没有明确提示，一般采取传统设法 $y=kx+m$.

这种设法是基于两点考虑：①联立出方程的过程简洁；②消参方便.

此外，使用此设法一定要先关注斜率 k 不存在——直线垂直于 x 轴的情况.

CHAPTER 3. 定值定点问题

3.1 定值定点问题导读

简述 定值定点问题是北京高考真题和模拟试题中非常常见的一类题目，相信大家通过日常的练习和考试，一定见到过不少此类型的试题，并且应当有一定的解题策略. 其实，在我们看来，定值定点问题仍然是需要通过解析几何工具与几何直观相结合进行综合应用的一类试题，解题思路其实和其他的解析几何题型并无太大差异. 但是，我们指出，此类题有一种比较独有的思想，即先猜后证思想. 在定值定点问题中，我们常常运用先猜后证思想，在进行运算前，先拿住结果，进而使得我们的解题方向更加明确. 因此，在本章中，我们不谈其他，只谈拿住答案的方法.

目标 根据具体题干，选择出快速猜得结论的方法，迅速拿到结论，优化解题路径.

3.2 专题例析

3.2.1 确定参数

例题 3.1 — 2021 海淀一模节选. 已知椭圆 $M:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，$A(-2,0)$，$B(0,1)$. 设椭圆 M 的右顶点为 C，点 P 在椭圆 M 上（点 P 不与椭圆 M 的顶点重合），直线 AB 与直线 CP 交于点 Q，直线 BP 交 x 轴于点 S，求证：直线 SQ 过定点. ■

分析 当我们遇到一道圆锥曲线的定值、定点试题，当我们需要这个定值或定点时，我们想到：既然这个值是定值，那么无论其他参数如何变化，我们依然可以得到这个定值.

因此，我们确定这个定值的策略之一即：将其他参数确定，如本题我们需要确定直线 SQ 的定点，我们可以考虑通过两组确定的参数，分别得到直线 SQ 的方程，进而把两根直线方程联立即可求得定点.

提示 确定参数是定值定点问题拿住答案的一个基本策略，我们通常通过将不确定的参数取到一个确定的整点，这个整点可能是一个比较好算的点，如有时候我们对直线取斜率不存在等.

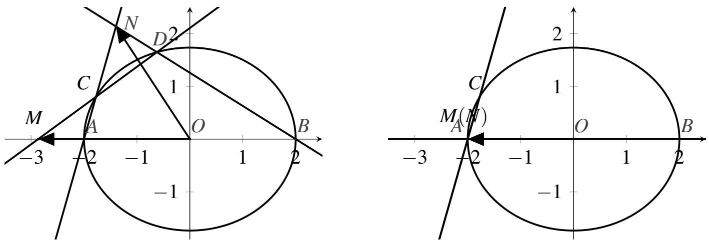
对于本题来说，这个策略不是最佳的，但是仍然建议同学们自行计算一遍，体会一下这个过程. 通过本节的学习后，希望同学们可以对这道题有新的思路，可以在“习题精选”中再将这道题以更优方法解决.

3.2.2 极端原理

例题 3.2 直线 l 与椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 相交于 C,D，与 x 轴相交于 M，已知 A,B 是椭圆的左右顶点，且直线 AC,BD 相交于点 N，证明：$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$ 是定值. ■

$\boxed{\text{分析}}$ 根据题意作出图象（左图），发现所求定值 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$ 是由 M,N 与 O 构成的向量生成，进而通过作图顺序找到其关联：过定点 M 的直线交椭圆于 C,D 两点，延长 AC,BD 交于点 N. 我们可以说：动点 M 是这个定值形成的动因——我们有了 M，进而才有了 N.

因此，我们考虑通过给予 M 一个特殊的位置，使得 N 有一个相应的位置，能让我们快速求得这个定值：我们考虑将点 M 无限趋近点 A，则得到右图.

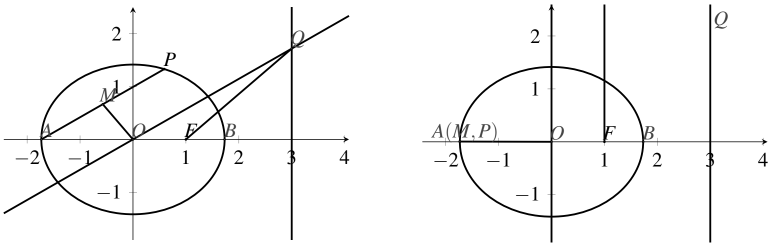


通过观察右图，我们不难发现 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=2\times2=4$.

例题 3.3 — 2022 东城期末节选. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$，$A(-\sqrt{3},0)$，$F(1,0)$. 设 P 为椭圆 C 上一动点 (不在 x 轴上)，M 为 AP 中点，过原点 O 作 AP 的平行线，与直线 $x=3$ 交于点 Q. 问：直线 OM 与 FQ 斜率的乘积是否未定值？若为定值，求出该值；若不为定值，请说明理由. ■

$\boxed{\text{分析}}$ 根据题意作出图象（左图），根据位置关系猜测 OM 和 FQ 具有垂直关系. 进而，我们将 P 置于特殊位置，一个无限趋近 A 的点（右图），我们发现此时 M 几乎与 A 重合，且平行线与 $x=3$ 交于无穷远处的点，可以近似地认为：OM 与 FQ 垂直，进而有 $k_{OM}\cdot k_{FQ}=-1$.

$\boxed{\text{提示}}$ 本题难度不大，因此利用先猜后证思想做题其实没有太起到简化过程的作用. 此处提及只是为了例析极端思想，提供一个求定值的思路.

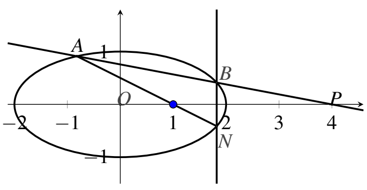


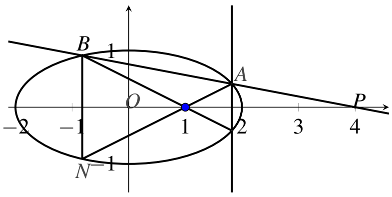
3.2.3 点交换

例题 3.4 已知椭圆 $C: \dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，过点 $P(4,0)$ 的直线 l 与椭圆交于 A,B 两点，设点 B 关于 x 轴的对称点为 N，求证：直线 AN 过定点. ■

$\boxed{\text{提示}}$ 这道题是第二章中的第一道例题，同学们可以发现：在解答过程的最后，我们直接对 y 赋值 0 得到 $x=1$. 这里同学们是否会好奇为什么我们能直接拿住 $y=0$ 呢？显然我们也用到"先猜后证"思想.

$\boxed{\text{分析}}$ 首先我们出图象（左图）. 接着，因为我们发现：题干中只告诉我们过点 P 的直线交点 P 圆锥曲线于 A,B 两点，其实这也暗示我们 A,B 是没有次序的. 因此我们将 A 和 B 的位置进行交换，得到右图，发现两条直线显然交于 x 轴上一点，我们可以拿住 $y=1$.

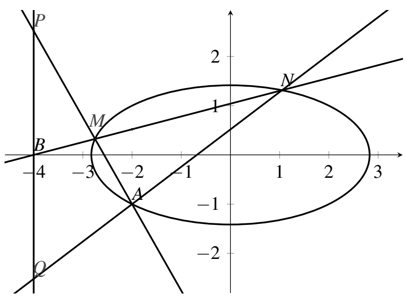


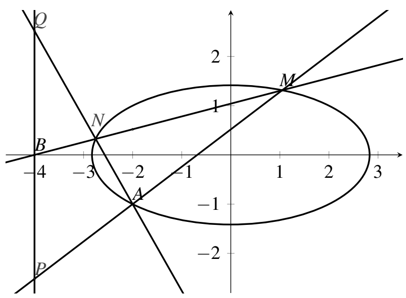


例题 3.5 — 2020 北京卷节选. 已知椭圆 $C: \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$，$A(-2,-1)$，过 $B(-4,0)$ 的直线 l 交椭圆 C 为点 M,N，直线 MA,NA 分别交直线 $x=-4$ 于点 P,Q. 求 $\dfrac{|PB|}{|BQ|}$ 的值. ■

$\boxed{\text{分析}}$ 首先我们根据题意作出图象（左图）. 同上题我们想到将点 M,N 的次序进行交换. 我们发现：在各线段长度没有发现的情况下，P,Q 的次序也相应地发生了改变. 因此我们有：

$$\frac{|PB|}{|BQ|}=\frac{|BQ|}{|PB|}=\frac{1}{\dfrac{|PB|}{|BQ|}}\text{，不难发现}\frac{|PB|}{|BQ|}=1 \Rightarrow |PB|-|BQ|=0 \Rightarrow y_P+y_Q=0.$$





3.3 习题精选

■ **习题 3.1 — 2021 东城一模节选.** 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，$D(-2,0)$. 过点 $A(-4,0)$ 的直线 l（不与 x 轴重合）与椭圆 C 交于 P,Q 两点，点 T 与点 Q 关于 x 轴对称，直线 TP 与 x 轴交于 H. 是否存在常数 λ，使得 $|AD|\cdot|DH|=\lambda(|AD|-|DH|)$ 成立，若存在，求出 λ 的值；若不存在，说明理由. ■

■ **习题 3.2 — 2021 海淀一模节选.** 已知椭圆 $M:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，$A(-2,0),B(0,1),C(2,0)$. 点 P 在椭圆 M 上（点 P 不与椭圆 M 的顶点重合），直线 AB 与直线 CP 交于点 Q，直线 BP 交 x 轴于点 S. 求证：直线 SQ 过定点. ■

■ **习题 3.3 — 2021 平谷一模节选.** 已知椭圆 $C: \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，$P(0,\sqrt{3})$. 设过点 P 的直线与 x 轴交于 N 点，与椭圆的另一个交点为 B，点 B 关于 x 轴的对称点为 B'，直线 PB' 交 x 轴于点 M. 求证：$|OM|\cdot|ON|$ 为定值. ■

■ **习题 3.4 — 2021 北京二中 10 月月考.** 已知椭圆 $C: \dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. 设直线 l 与椭圆 C 交于 A,B 两点，且以 AB 为直径的圆过椭圆右顶点 M. 求证：直线 l 恒过定点. ■

■ **习题 3.5 — 2021 人大附中开学考节选.** 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$. 点 M，N 为椭圆 C 上异于 A，B 的两点，直线 AM，BN 相交于点 P. 若点 P 在直线 $x=\dfrac{9}{2}$ 上. 证：直线 MN 过定点. ■

■ **习题 3.6 — 2021 人大附中 12 月考节选.** 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$. 直线 l 与椭圆 C 有两个不同的交点 A,B，且直线 PA 交 y 轴于 M，直线 PB 交 y 轴于 N. 设 O 为原点，若 $|OM|=|ON|$，求证：直线 l 经过定点. ■

■ **习题 3.7 — 2021 人大附中 2 月考节选.** 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. 过椭圆 C 右焦点 F 作直线 l 交椭圆 C 于 A,B 两点，交 y 轴于 M 点. 若 $\overrightarrow{MA}=\lambda_1\overrightarrow{AF},\overrightarrow{MB}=\lambda_2\overrightarrow{BF}$，证：$\lambda_1+\lambda_2$ 为定值. ■

■ **习题 3.8 — 2021 昌平期末节选.** 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. 设过点 $F(1,0)$ 且斜率为 k 的直线 l 与椭圆 C 交于 A,B 两点，线段 AB 的垂直平分线交 x 轴点 D. 判断：$\dfrac{|AB|}{|DF|}$ 是否为定值? 如果是定值，请求出此定值；如果不是定值，请说明理由 ■

■ **习题 3.9 — 2021 房山二模节选.** 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，$O$ 为坐标原点，F 是椭圆 C 的右焦点，A 为椭圆上一点且 $AF\perp x$ 轴. 椭圆 C 上一点 $P(x_0,y_0)(y_0\neq 0)$ 的直线 l: $\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$ 与直线 AF 相交于点 M，与直线 $x=4$ 相交于点 N. 证明：$\dfrac{|MF|}{|NF|}$ 为定值. ■

■ **习题 3.10 — 2021 学科综合能力测试节选.** 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{6}+y^2=1$. 经过原点的直线与椭圆 C 交于 P,Q 两点，直线 PM 与直线 PQ 垂直，且与椭圆 C 的另一个交点为 M. 当点 P 不是椭圆 C 的顶点时，求直线 PQ 和直线 QM 的斜率之比. ■

CHAPTER 4. 条件分析

4.1 条件分析导读

简述 条件分析是我们在简述解决圆锥曲线问题中非常重要的一个环节. 通常，当我们看到题中的一些信息，用代数表达式表示几何条件的这个过程就叫做条件分析. 不同于一些常规的条件分析的讲法，我们采用由条件转化的工具入手的角度，旨在让同学们在学完本章后，不仅能对我们所学过、做过的例题熟练掌握，而且能在遇到新的试题时快速调用我们的条件转换“工具库”，进而快速进行解答.

目标 通过本章的学习，希望同学们对条件转换的工具有所了解，在解题中能快速调用.

4.2 弦长与面积

4.2.1 专题例析

4.2.1.1 弦长公式

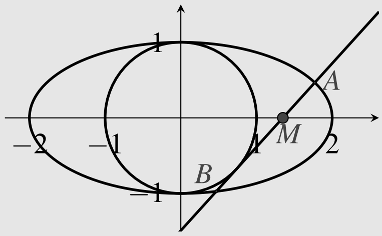
$y=kx+m$：$|l|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|\text{二次系数}|}$；

$x=ty+n$：$|l|=\sqrt{1+t^2}|y_1-y_2|=\sqrt{1+t^2}\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|\text{二次系数}|}$.

$\boxed{\text{说明}}$ 当两点在不同曲线上时，选择 $\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|$ 和 $\sqrt{1+t^2}|y_1-y_2|$；

当两点在同一二次曲线上时,选似 $\sqrt{1+k^2}\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|\text{二次系数}|}$ 和 $\sqrt{1+t^2}|y_1-y_2|=\sqrt{1+t^2}\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|\text{二次系数}|}$.

例题 4.1 — 2011 北京卷理节选. 已知椭圆 $G:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，过点 $(m,0)$ 作圆 $x^2+y^2=1$ 的切线 l 交椭圆 G 于 A,B 两点. 将 $|AB|$ 表示为 m 的函数，并求 $|AB|$ 的最大值.



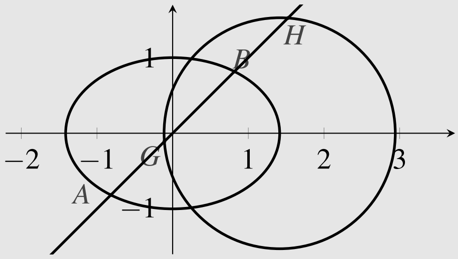
$\boxed{\text{分析}}$ 设 $l:x=ty+m$，根据前面所学易得联立后 $\Delta=4\left(\dfrac{t^2}{4}+1-\dfrac{m^2}{4}\right)=t^2-m^2+4$，进而我们根据上述“弦长公式”，得到 $|AB|=\sqrt{1+t^2}\dfrac{\sqrt{t^2-m^2+4}}{\dfrac{t^2}{4}+1}$，

接着我们根据相切条件，有：$\dfrac{|m|}{\sqrt{1+t^2}}=1\Rightarrow|m|=\sqrt{1+t^2}\Rightarrow m^2-1=t^2\Rightarrow t^2-m^2=-1$，

所以我们有：$|AB|=\dfrac{|m|\sqrt{3}}{\dfrac{m^2+3}{4}}=\dfrac{4\sqrt{3}|m|}{m^2+3}=\dfrac{4\sqrt{3}}{|m|+\dfrac{4\sqrt{3}}{|m|}}(|m|\geq 1)$.

$\boxed{\text{提示}}$ 弦长 $|AB|$ 中 A,B 两点均在椭圆上，因此我们采取 $\sqrt{1+t^2}\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|\text{二次系数}|}$ 的形式.

例题 4.2 — 2013 海淀一模文节选. 已知圆 $M:(x-\sqrt{2})^2+y^2=\dfrac{7}{3}$，椭圆 $C:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$. 若存在直线 $l:y=kx$，使得直线 l 与椭圆 C 交于 A,B 两点，与圆 M 分别交于 G,H 两点，点 G 在线段 AB 上，且 $AG=BG$，求 k 的值.



$\boxed{\text{分析}}$ $|AG|=|BH|\Rightarrow$ 椭圆弦长、圆的弦长 $\Rightarrow |AB|=|GH|$，

$|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=2\sqrt{1+k^2}|x_1|$，$|GH|=2\sqrt{r^2-d^2}$，

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+y^2=1\\ y=kx\end{cases}\Rightarrow(\frac{1}{2}+k^2)x^2=1\Rightarrow|x_1|=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}+k^2}}\Rightarrow|AB|=\frac{2\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{\frac{1+2k^2}{2}}},$$

$$d=\frac{|\sqrt{2}k|}{\sqrt{1+k^2}}\Rightarrow|GH|=2\sqrt{\frac{7}{3}-\frac{2k^2}{1+k^2}}=2\sqrt{\frac{7+k^2}{3(1+k^2)}},$$

所以 $2\sqrt{\dfrac{7+k^2}{3(1+k^2)}}=\dfrac{2\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{\frac{1+2k^2}{2}}}$，化简得 $6(1+k^2)^2=(1+2k^2)(7+k^2)\Rightarrow 4k^4-3k^3-1=0$，

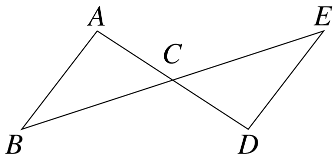
$(4k^2+1)(k^2-1)=0$，解得 $k=\pm1$.

$\boxed{\text{提示}}$ 当两点不在同一二次曲线上时，我们选择 $\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|$.

4.2.1.2 面积

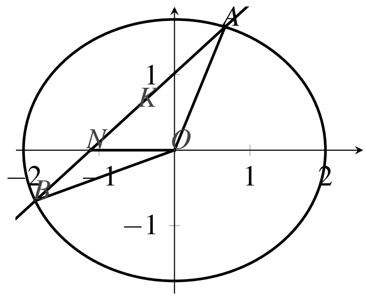
1. 基础公式：$S=\dfrac{1}{2}ah$（保底）；

2. 对顶角：$S=\dfrac{1}{2}ab\sin C$，$S_{左}=S_{右}\Rightarrow |AC|\cdot|CB|=|CD|\cdot|CE|$.

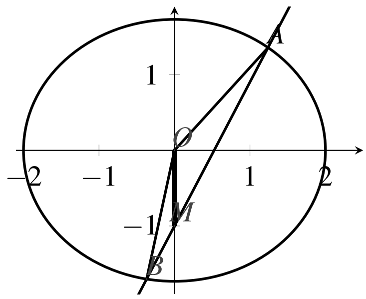


3. 拆分——定长

（1）$N(n,0),A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，$AB$ 上一点 $K\Rightarrow S_{\triangle AOB}=S_{\triangle KOB}+S_{\triangle KOA}=\dfrac{1}{2}|OK|\cdot|y_1-y_2|$.



（2）$M(0,m),A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，$AB$ 上一点 $K\Rightarrow S_{\triangle BOK}-S_{\triangle AOK}=\dfrac{1}{2}|OK|\cdot|x_1-x_2|$.



4.$\overrightarrow{AB}=(x_1,y_1)$，$\overrightarrow{AC}=(x_2,y_2)$，则 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$.

若四边形 $ABCD$ 中 AC,BD 是对角线，且 $\overrightarrow{AC}=(x_1,y_1),\overrightarrow{BD}=(x_2,y_2)$，则

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|.$$

5.$P(x_0,y_0),A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $S_{\triangle PAB}=\dfrac{1}{2}|(x_0y_1+x_1y_2+x_2y_0)-(x_0y_2+x_1y_0+x_2y_1)|$.

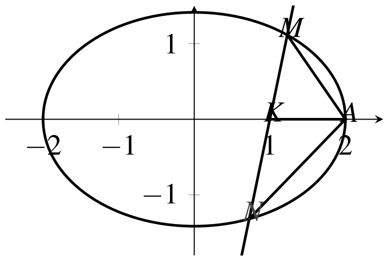
例题 4.3 — 2012 北京卷文节选. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$，$A(2,0)$，直线 $y=k(x-1)$ 与椭圆 C 交于不同的两点 M,N. 当 $\triangle AMN$ 的面积为 $\dfrac{\sqrt{10}}{3}$ 时，求 k 的值. ■

分析 根据题意作出图象，我们想到可以通过两种思路表达面积:

方向 1：$S_{\triangle AMN}=\dfrac{1}{2}|KA|\cdot|y_1-y_2|=\dfrac{1}{2}|y_1-y_2|$；

方向 2：设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，则 $\overrightarrow{AM}=(x_2-2,y_2),\overrightarrow{AN}=(x_1-2,y_1)$，$l:x=ty+1$，则

$$S_{\triangle AMN}=\frac{1}{2}|(x_2-2)y_1-(x_1-2)y_2|=\frac{1}{2}|(ty_2-1)y_1-(ty_1-1)y_2|=\frac{1}{2}|y_1-y_2|.$$

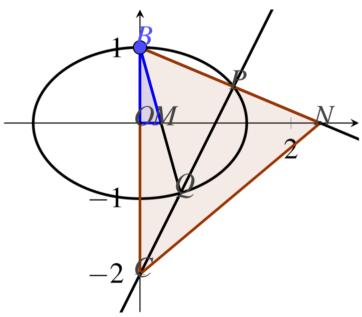


例题 4.4 — 2020 门头沟一模节选. 已知椭圆 $G:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$，上顶点 $B(0,1)$，直线 $l:y=kx-2$ 交 y 轴于 C 点，交椭圆于 P,Q 两点，直线 BP,BQ 分别交 x 轴于点 M,N. 证明: $S_{\triangle BOM}\cdot S_{\triangle BCN}$ 为定值. ■

分析 根据题意作出图象，

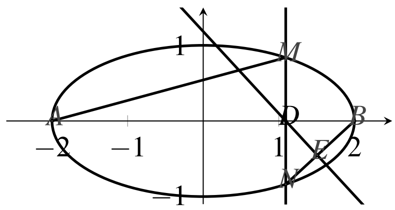
$S_{\triangle BOM}=\dfrac{1}{2}|BO|\cdot|OM|$，$S_{\triangle BCN}=\dfrac{1}{2}|BC|\cdot|ON|$，

$S_{\triangle BOM}\cdot S_{\triangle BCN}=\dfrac{1}{4}13|OM|\cdot|ON|=\dfrac{3}{4}|OM|\cdot|ON|$.



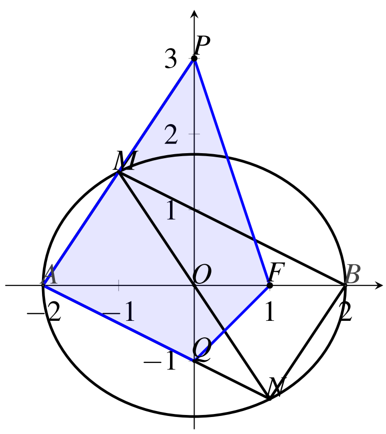
例题 4.5 — 2017 北京卷文节选. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，A,B 为左、右顶点.D 为 x 轴上一点，过 D 作 x 轴的垂线交椭圆 C 于不同的两点 M,N，过 D 作 AM 的垂线交 BN 于点 E. 求证：$\triangle BDE$ 与 $\triangle BDN$ 的面积之比为 $4:5$. ■

$\boxed{\text{分析}}$ 根据题意作出图像，$\dfrac{S_{\triangle BDE}}{S_{\triangle BDN}}=\dfrac{4}{5}=\dfrac{\frac{1}{2}|BE|\cdot h}{\frac{1}{2}|BN|\cdot h}=\dfrac{4}{5}=\dfrac{2-x_E}{2-x_D}$.



例题 4.6 — 2021 石景山一模节选. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，$A,B$ 为左右顶点.M,N 是椭圆 C 上两个不同的点，四边形 $AMBN$ 是平行四边形，直线 AM,AN 分别交 y 轴于点 P,Q，求四边形 $APFQ$ 面积的最小值. ■

$\boxed{\text{分析}}$ 根据题意作出图像，$S_{\text{四边形}APFQ}=\dfrac{1}{2}|AF|\cdot|PQ|=\dfrac{3}{2}|PQ|$.



4.2.2 习题精选

■ **习题 4.1 — 2022 石景山期末节选.** 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$，O 为坐标原点，右焦点 F. 椭圆 C 在 y 轴上的两个顶点为 A,B，点 P 满足 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$，直线 PF 交椭圆于 M,N 两点，且 $|MN|=\sqrt{3}$，求此时 $\angle OPF$ 的大小. ■

■ **习题 4.2 — 2022 西城高二期末节选.** 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，过点 $P(1,0)$ 的直线 l 交椭圆 C 于 M,N 两点. 证明：$|MN|\geq 3$. ■

■ **习题 4.3 — 2022 北京五中十二月考节选.** 已知椭圆 $G:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$，与 x 轴不重合的直线 l 经过左焦点 F_1，且与椭圆 G 相交于 A,B 两点，弦 AB 的中点为 M，直线 OM 与椭圆 G 相交于 C,D. 是否存在直线 l，使得 $|AB|^2=4|CM|\cdot|DM|$ 成立？若存在，求出直线 l 的方程；若不存在，请说明理由. ■

■ **习题 4.4 — 2021 北京临川学校期末.** 已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$. 设直线 $l: y=k(x-1)(k\in\mathbb{R})$ 与椭圆 E 交于 A,B 两点，与圆 $x^2+y^2=a^2$ 交于 C,D 两点，求 $|AB|\cdot|CD|^2$ 的取值范围. ■

■ **习题 4.5 — 2022 南开期末节选.** 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}$，$P$ 为椭圆 C 上的一个动点，右焦点为 F. 设斜率不为零的直线 PF 与椭圆 C 的另一个交点为 Q，求 $|PQ|$ 的取值范围. ■

■ **习题 4.6 — 2022 华大新高考 11 月考.** 已知 $C_1:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1(x\neq\pm2)$, $C_2:\dfrac{x^2}{4}-y^2=1(x\neq\pm2)$. 是否存在过 C_1 右焦点的直线 l，满足直线 l 与 C_1 交于 C,D 两点，直线 l 与 C_2 交于 M,N 两点，且 $|MN|=\sqrt{3}|CD|$？若存在，求所有满足条件的直线 l 的斜率之积；若不存在，请说明理由. ■

■ **习题 4.7 — 2022 西城期末节选.** 已知椭圆 $M: \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$. 过右焦点 F 的直线 l 与椭圆 M 交于 A,B 两点，$BC \perp x$ 轴于点 C，$AD \perp x$ 轴于点 D，直线 BD 交直线 $x=4$ 于点 E. 求 $\triangle ECD$ 与 $\triangle EAB$ 的面积之比. ■

■ **习题 4.8 — 2022 海淀期末节选.** 已知椭圆 $C: \dfrac{x^2}{3}+y^2=1$. 设直线 $l: y=k(x-1)$(其中 $k\neq 1$) 与椭圆 C 交于不同两点 E,F，直线 AE,AF 分别交直线 $x=3$ 于点 M,N. 当 $\triangle AMN$ 的面积为 $3\sqrt{3}$ 时，求 k 的值. ■

■ **习题 4.9 — 2021 海淀期末节选.** 已知椭圆 $W:\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$，$C(2,\sqrt{3})$.$A,B$ 分别为椭圆 W 的左、右顶点，点 D 在椭圆 W 上，且位于 x 轴下方，直线 CD 交 x 轴于点 D. 若 $\triangle ACQ$ 的面积比 $\triangle BDQ$ 的面积大 $2\sqrt{3}$，求点 D 的坐标. ■

■ **习题 4.10 — 2022 首师大附中 12 月考.** 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. 椭圆 C 的短轴上下端点分别为 A,B，点 $M\left(m,\dfrac{1}{2}\right)(m\neq 0,\pm\sqrt{3})$，若直线 AM,BM 分别交椭圆 C 于 E,F 两点，且 $\triangle BME$ 的面积是 $\triangle AMF$ 面积的 5 倍，求 m 的值. ■

4.3 角与三角形

4.3.1 专题例析

4.3.1.1 基本条件

$$1.\alpha \Rightarrow \text{代数化}\begin{cases} \sin\alpha \Rightarrow \begin{cases} \text{面积} \\ \text{正弦定理} \end{cases} \\ \cos\alpha \Rightarrow \text{点乘} \\ \tan\alpha \Rightarrow \text{斜率} \end{cases}$$

$$2.\ \text{三角形} \Rightarrow \text{垂直平分线}\begin{cases} \text{等腰三角形} \\ \text{等腰直角三角形} \\ \text{等边三角形} \end{cases}$$

弦长公式、面积公式、两点间距离公式、点到直线距离公式

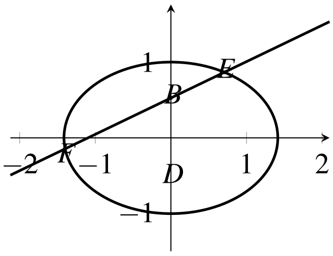
$$3.\ \text{向量} \Rightarrow \begin{cases} \text{平行四边形/三角形} \Rightarrow \text{菱形、矩形、正方形} \\ \text{数乘}\begin{cases} \text{平行/共线} \\ \text{等分点/比例} \end{cases} \\ \text{点乘} \Rightarrow \begin{cases} \text{角度} \\ \text{长度} \end{cases} \end{cases}$$

$$4.\ \text{长度} \Rightarrow \begin{cases} \text{弦长} \\ \text{投影} \\ \text{向量} \end{cases}$$

例题 4.7 — 2016 西城二模理节选. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$. 设过 $B(0,m)(m>0)$ 的直线 l 与椭圆 C 相交于 E,F 两点，点 B 关于原点的对称点为 D，若点 D 总在以线段 EF 为直径的圆内，求 m 的取值范围. ■

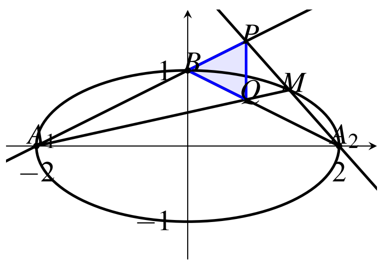
$\boxed{\text{分析}}$ 点 D 线段 EF 为直径的圆内 $\Leftrightarrow \overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF}<0$.

$\boxed{\text{提示}}$ 用向量刻画点与圆的位置关系：$\begin{cases}\text{点在圆内}\Leftrightarrow \overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF}<0\\ \text{点在圆上}\Leftrightarrow \overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF}=0\\ \text{点在圆外}\Leftrightarrow \overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF}>0\end{cases}$



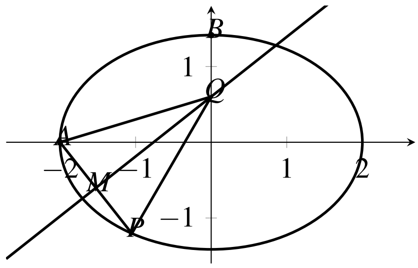
例题 4.8 — 2020 海淀一模节选. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1.A_1,A_2$ 为左右顶点，B 为上顶点. 设 M 是椭圆 C 上一点，且不与顶点重合，若直线 A_1B 与直线 A_2M 交于点 P，直线 A_1M 与直线 A_2B 交于点 Q. 求证：$\triangle BPQ$ 为等腰三角形. ■

$\boxed{\text{分析}}$ 要证 $\triangle BPQ$ 为等腰三角形，我们想到通过证明 PQ 中点与 B 所连成的直线为 PQ 中出现，即 $\dfrac{y_P+y_Q}{2}=y_B=1$. 因此我们通过表示出 P,Q 的坐标即可证明.



例题 4.9 — 2019 海淀二模理节选. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$. 点 P 在椭圆 C 上，A,B 为椭圆 C 的左顶点和上顶点. 线段 AP 的垂直平分线与 y 轴相交于点 Q，若 $\triangle PAQ$ 为等边三角形，求点 P 的横坐标. ■

$\boxed{\text{分析}}$ 根据 $\triangle PAQ$ 为等边三角形，证明方向有：$\angle Q=\dfrac{\pi}{3}$，$|AP|=|PQ|=|AQ|$. 我们选择通过三角换元设出 A,B 两点，进而表述出 M 点坐标，利用中垂线 MC 的直线方程，令 $x=0$ 求得 Q 的坐标，表达 $|AP|=|AQ|$，求解方程即可.



例题 4.10 — 2014 海淀一模理节选. 已知椭圆 $C:2x^2+3y^2=9$. 上有两点 A,B，$M(1,0)$. 证明：当 A,B 不关于 x 轴对称时，$\triangle MAB$ 不可能为等边三角形. ■

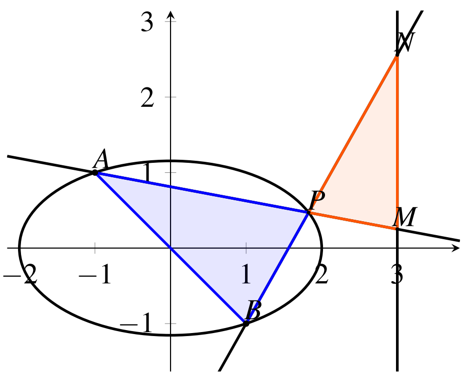
$\boxed{\text{分析}}$ $\triangle MAB$ 为等边三角形的必要条件是首先它是等腰三角形. 因此，我们通过表达出 $|MA|$ 和 $|MB|$ 的表达式，进而发现在 A,B 不关于 x 轴对称的情况下，$|MA|\neq|MB|$.

4.3.1.2 复合条件

$$
\text{角相等 } \alpha=\beta\begin{cases}\text{定义代数化}\begin{cases}\sin\alpha=\sin\beta\Rightarrow\begin{cases}\text{面积}\\ \text{正弦定理}\end{cases}\\ \cos\alpha=\cos\beta\Rightarrow\text{点乘}\\ \tan\alpha=\tan\beta\Rightarrow\text{斜率}\end{cases}\Rightarrow\text{是否做得出}\\ \text{性质：因地制宜（积累）}\Rightarrow\text{做得快与慢}\end{cases}
$$

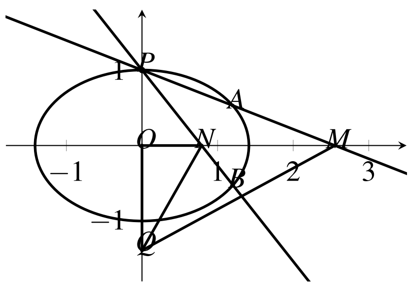
例题 4.11 — 2010 北京卷理节选. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{\frac{4}{3}}$，$O$ 是坐标原点 $A(-1,1),B(1,-1)$，P 是椭圆上的一个动点. 设直线 AP,BP 交直线 $x=3$ 于点 M,N，问：是否存在点 P，使得 $\triangle PAB$ 与 $\triangle PMN$ 的面积相等？若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，说明理由. ■

分析 $S_{\triangle ABP}=S_{\triangle PMN}\Rightarrow S_{\triangle ABM}=S_{\triangle MNB}\Rightarrow AN\parallel BM\Rightarrow P=\dfrac{x_A+x_T+x_N}{3}$（重心）.



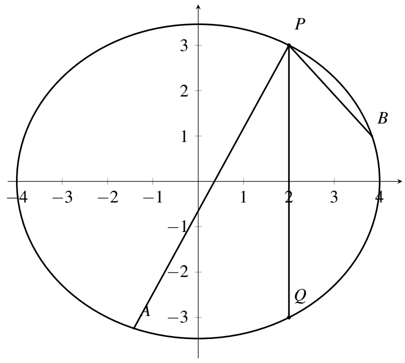
例题 4.12 — 2015 北京卷节选. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$，$P(0,1)$，椭圆 C 上一点 $A(m,n)(m\neq 0)$，直线 PA 交 x 轴于点 M. 设 O 为原点，点 B 与点 A 关于 x 轴对称，直线 PB 交 x 轴于点 N. 问：y 轴上是否存在点 Q，使得 $\angle OQM=\angle ONQ$？若存在，求点 Q 的坐标；若不存在，说明理由. ■

分析 $\angle OQM=\angle ONQ\Rightarrow\tan\angle OQM=\tan\angle ONQ\Rightarrow\dfrac{|OM|}{|OQ|}=\dfrac{|OQ|}{|ON|}\Rightarrow|OQ|^2=|OM||ON|$.



例题 4.13 — 2018 石景山期末理节选. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$，$P(2,3),Q(2,-3).A,B$ 是椭圆上位于直线 PQ 两侧的动点. 当 A,B 运动时，满足 $\angle APQ=\angle BPQ$，试问直线 AB 的斜率是否未定值？如果为定值，请求出此定值；如果不是定值，请说明理由. ■

$\boxed{\text{分析}}$ $\angle APQ=\angle BPQ \Rightarrow k_{PA}+k_{PB}=0.$



4.3.2 习题精选

■ **习题 4.11 — 2015 海淀期末理节选.** 已知椭圆 $M:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，左顶点 C. 过左焦点 F 的直线 l（不与 x 轴重合）交 M 于 A,B 两点. 是否存在直线 l，使得点 B 在以线段 AC 为直径的圆上？若存在，求出直线 l 的方程；若不存在，说明理由. ■

■ **习题 4.12 — 2013 山东卷理节选.** 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. 左、右焦点分别为 F_1,F_2. 点 P 是椭圆上除长轴端点外的任一点，连接 PF_1,PF_2，设 $\angle F_1PF_2$ 的角平分线 PM 交 C 的长轴于点 $M(m,0)$，求 m 的取值范围. ■

■ **习题 4.13 — 2017 西城一模节选.** 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，右焦点 F，左顶点 A. 设 O 为原点，P 为椭圆上一点，AP 的中点为 M. 直线 OM 与直线 $x=4$ 交于点 D，过 O 且平行于 AP 的直线与直线 $x=4$ 交于点 E. 求证：$\angle ODF=\angle OEF$. ■

CHAPTER 5. 命题背景

5.1 命题背景导读

有众多的圆锥曲线大题的命制基于一些高观点的命题背景，而近年来越来越多的老师愿意介绍一些这样的内容，以达到最粗暴的方式拿住答案，进而反应出解题的思路. 然而，很多同学在自行尝试学习这些高观点知识时有可能会误入歧途，如：自行学校大学数学材料而走火入魔、在考场上用不明不白的写法将高观点知识中运用在解题过程中，而偏失了拿住答案出思路这个初心. 在本章节中，我们将向同学们介绍一些高观点的内容，希望同学们通过本章的学习能正确对待高观点的内容，并能在考场上以合适的方式进行应用.

5.2 极点极线

简述 近年来，极点极线作为圆锥曲线大题的命题背景，多次在北京市高考真题和模拟题中出现. 了解相关知识点有利于在解题过程中心中有数，能够快速求得答案，实现先猜后证的目的.

目标 通过本节的学习，希望同学们了解极点极线的几个模型，通过对其的熟练掌握，在考试中快速实现先猜后证，先拿住答案，进而优化运算思路.

5.2.1 专题例析

5.2.1.1 自极三角形

$\boxed{\text{模型}}$ 根据题中条件作图，发现椭圆上存在四点（且均有用）⇒ 连接对角线，并将两组邻边延长使得相交于两点 ⇒ 连接对角线交点、延长得到的两个交点得到一个三角形.

$\boxed{\text{结论}}$我们称这个三角形为**自极三角形**. 每个顶点 (x_0, y_0) 所对边的直线方程为

$$l: \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

同时，我们称这三个顶点为**极点**，对边直线为其关于椭圆的**极线**.

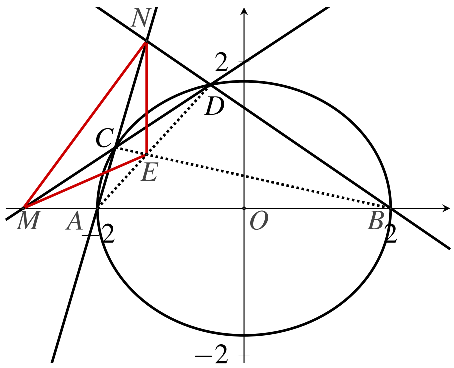
例题 5.1 直线 l 与椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 相交于 C,D，与 x 轴相交于 M，已知 A,B 是椭圆的左右顶点，且直线 AC,BD 相交于点 N，证明：$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$ 是定值. ■

步骤 1：根据题中条件作图，发现椭圆 C 上存在四个点 A,B,C,D，且与所求相关；

步骤 2：连接对角线交于 E，延长 BA,DC 交于点 M，延长 AC,BD 交于点 N；

步骤 3：连接 MEN 得到一个自极三角形；

步骤 4：根据结论，设 $M(x_0,0)$，则直线 $l_{NE}:\dfrac{xx_0}{4}=0$，即 $x=\dfrac{4}{x_0}$，所以 $x_Nx_M=\dfrac{4}{x_0}\cdot x_0=4$.



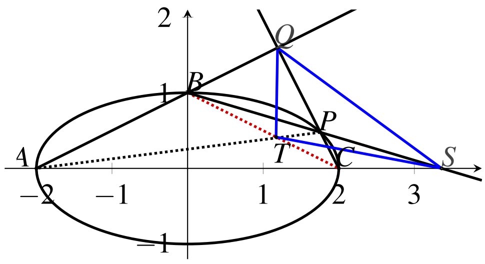
例题 5.2 — 2021 海淀一模节选. 已知椭圆 M：$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，$A(-2,0)$，$B(0,1)$. 设椭圆 M 的右顶点为 C，点 P 在椭圆 M 上（点 P 不与椭圆 M 的顶点重合），直线 AB 与直线 CP 交于点 Q，直线 BP 交 x 轴于点 S，求证：直线 SQ 过定点. ■

步骤 1：根据题中条件作图，发现椭圆 C 上存在四个点 A,B,C,D，且与所求相关；

步骤 2：连接对角线交于 T，延长 AB,CP 交于点 Q，延长 BP,AC 交于点 S；

步骤 3：连接 TQS 得到一个自极三角形；

步骤 4：通过 l_{BC} 设出 $T\left(m,-\dfrac{1}{2}m+1\right)$，根据结论，直线 $l_{QS}:\dfrac{mx}{4}+y\left(-\dfrac{1}{2}m+1\right)-1=0$，整理得 $l_{QS}:m\left(\dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{2}y\right)+y-1=0$，过定点 $(2,1)$.



5.2.1.2 调和分割

$\boxed{\text{模型}}$ 过 P 作关于圆锥曲线的割线，交曲线于 M_1,M_2，与其对应的极线交于 Q.

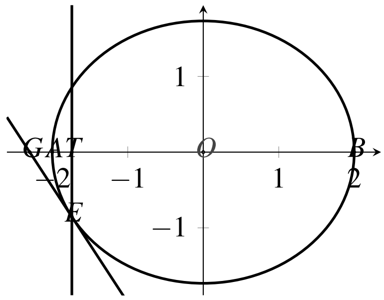
$\boxed{\text{结论}}$ P,Q 调和分割线段 M_1M_2，满足：$\dfrac{PM_1}{M_1Q}=\dfrac{PM_2}{M_2Q}\Longleftrightarrow\dfrac{1}{PM_1}+\dfrac{1}{PM_2}=\dfrac{2}{PQ}$.

例题 5.3 — 2021 东城期末节选. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，左右顶点分别为 A,B，直线 $l:\dfrac{xx_0}{a^2}+\dfrac{yy_0}{b^2}=1$ 与椭圆 C 有且仅有一个公共点 $E(x_0,y_0)$，且与 x 轴交于点 G（点 E，G 不重合），$ET\perp x$ 轴，垂足为 T. 求证：$\dfrac{|TA|}{|TB|}=\dfrac{|GA|}{|GB|}$. ■

$\boxed{\text{分析}}$ 令 $y=0$，则 $\dfrac{xx_0}{a^2}=1$，$x=\dfrac{a^2}{x_0}$，即 $G\left(\dfrac{a^2}{x_0},0\right)$.

又因 G 关于 C 的极线为 $\dfrac{xa^2}{a^2x_0}=1$，即 $x=x_0$，

所以 ET 为 G 关于椭圆的极线，G,T 调和分割 A,B，$\dfrac{|TA|}{|TB|}=\dfrac{|GA|}{|GB|}$.



例题 5.4 — 2020 北京卷改编. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$，$A(-2,-1)$，过 $B(-4,0)$ 的直线 l 交椭圆 C 为点 M,N，直线 MN 与直线 $x=-2$ 的交点为 T，直线 MA,NA 分别交直线 $x=-4$ 于点 P,Q. 求 $\dfrac{|PB|}{|BQ|}$ 的值. ■

$\boxed{\text{分析}}$ 点 $B(-4,0)$ 关于椭圆对应的极线为 $x=-2$，因此 B,T 调和分割 M,N，

从而有 $\dfrac{|BM|}{|BN|}=\dfrac{|TM|}{|TN|}$，进而有 $\dfrac{|BM|}{|TM|}=\dfrac{|BN|}{|TN|}$，

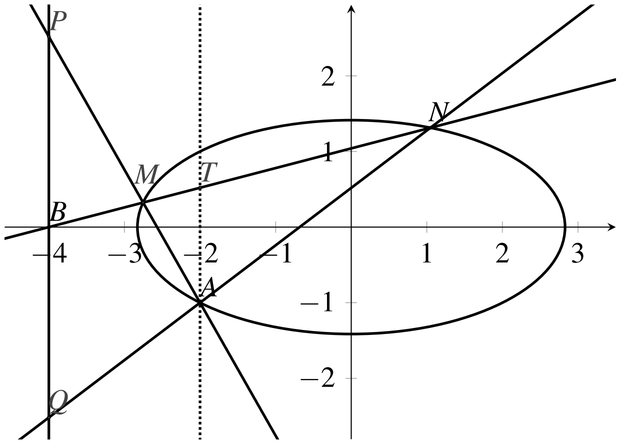
因为 $PQ\parallel AT$，不难发现 $\triangle BMP\sim\triangle TMA$，进而有 $\dfrac{|BM|}{|TM|}=\dfrac{|BP|}{|TA|}$，

同理，由 $\triangle MTA\sim\triangle MBQ$，有 $\dfrac{|BN|}{|TN|}=\dfrac{|BQ|}{|AT|}$，

所以有 $\dfrac{|BM|}{|TM|}=\dfrac{|BN|}{|TN|}=\dfrac{|BP|}{|AT|}=\dfrac{|BQ|}{|AT|}$，

所以有 $\dfrac{|PB|}{|AT|}=\dfrac{|QB|}{|AT|}$，即 $|PB|=|QB|$，故 $\dfrac{|PB|}{|BQ|}=1$.

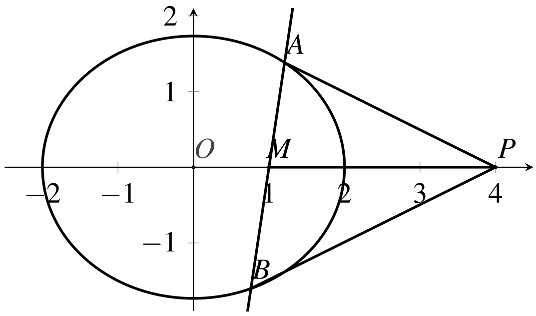
$\boxed{\text{提示}}$ 调和分割是极点极线知识点中比较难的一个部分，其应用于试题中的形式一般都不是很直接. 希望同学们通过这两道题目的学习，对调和分割的应用场景有一定的感知，后续可以结合附录中“极点极线知识点详解”部分内容进行进一步理解.



5.2.1.3 反演点——角平分线

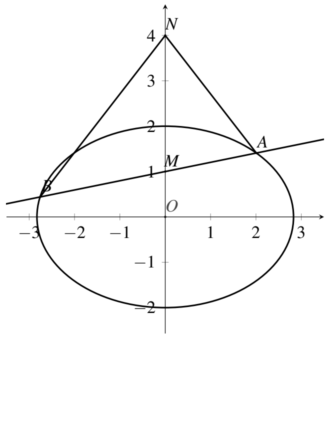
模型 圆锥曲线内一点 $M(m,0)$ 与其极点与 x 轴交点 $P(\frac{a^2}{m},0)$ 互为反演点.

结论 过 M 作椭圆的割线（不与 x 轴重合），交椭圆于 $A,B \Rightarrow \angle APM = \angle BPM$.



例题 5.5 — 2021 顺义二模节选. 已知椭圆 $G:\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$. 过点 $M(0,1)$ 且斜率为 $k(k\neq 0)$ 的直线 l 交椭圆 G 于 A,B 两点，在 y 轴上是否存在点 N 使得 $\angle ANM = \angle BNM$（点 N 与点 M 不重合)？若存在，求出点 N 的坐标，若不存在，请说明理由. ■

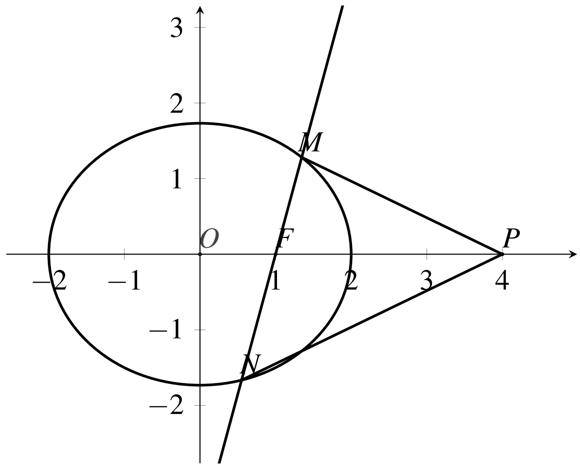
分析 题干给出了 y 轴上的定点 M，要求我们找出 y 轴上的 N，N 与过 M 割线与椭圆交点构成角平分线. 显然属于“反演点模型”，容易想到 N 是 M 点关于椭圆极线 $\frac{y\cdot 1}{4}=1$ 与 y 轴交点. 容易求得 $N(0,4)$.



例题 5.6 — 2018 丰台二模理改编. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，过右焦点 F 且不与坐标轴垂直的直线 l 与椭圆交于 M,N 两点，设点 $P(m,0)$，记直线 PM,PN 的斜率分别为 k_1,k_2. 若 $k_1+k_2=0$，求 m 的值. ■

分析 由条件 $k_1+k_2=0$，不难得到 $\angle MPF=\angle NPF$，即又得到了我们的“反演点模型”
.

根据 F 的极线为 $x=4$，容易得到 $P(4,0)$.



5.2.2 习题精选

> **R** 本模块的习题中，同学们主要需要体会利用结论求得答案的过程.

■ **习题 5.1 — 2021 东城一模节选.** 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，$D(-2,0)$，过点 $A(-4,0)$ 的直线 l（不与 x 轴重合）与椭圆 C 交于 P,Q 两点，点 T 与点 Q 关于 x 轴对称，直线 TP 与 x 轴交于 H. 是否存在常数 λ，使得 $|AD|\cdot|DH|=\lambda(|AD|-|DH|)$ 成立. 若存在，求出 λ 的值；若不存在，说明理由. ■

■ **习题 5.2 — 2020 大兴期末节选.** 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$, 点 $A(1,0),B(4,0)$, 已知: 过点 A 的任意一条直线 l 与椭圆 C 交于 M,N 两点, 证明: $|MB|\cdot|NA|=|MA|\cdot|NB|$. ■

■ **习题 5.3 — 2019 海淀期末理节选.** 椭圆 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 的左焦点为 F, 过点 $M(-2,0)$ 的直线 l 与椭圆交于不同两点 A,B. 若点 B 关于 x 轴的对称点为 B', 求 $|AB'|$ 的取值范围. ■

■ **习题 5.4 — 2019 东城期末理节选.** 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 过点 $P(2,1)$. 过点 P 作 x 轴的垂线 l, 设点 A 为第四象限内一点且在椭圆 C 上（点 A 不在直线 l 上）, 点 A 关于 l 的对称点为 A', 直线 $A'P$ 与 C 交于另一点 B. 设 O 为原点, 判断直线 AB 与直线 OP 的位置关系, 并说明理由. ■

■ **习题 5.5 — 2019 海淀一模文节选.** 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ 的左顶点为 $A(-2,0)$，过点 $P(1,0)$ 且与 x 轴不重合的直线 l 与椭圆交于 M,N 不同的两点. 若过点 P 且平行于 AM 的直线交直线 $x=\frac{5}{2}$ 于点 Q. 求证: 直线 NQ 恒过定点. ■

■ **习题 5.6 — 2019 西城一模文节选.** 已知椭圆 $W: \frac{x^2}{4}+y^2=1$ ，左、右顶点分别为 A,B，过点 $P(1,0)$ 的直线与椭圆 W 交于不同的两点 C,D (不与点 A,B 重合) . 若直线 CB 与直线 AD 相交于点 M, 判断点 M 是否位于一条定直线上? 若是, 写出该直线的方程. (结论不证明) ■

■ **习题 5.7 — 2017 房山一模理节选.** 已知椭圆 $C: x^2+4y^2=4$. 椭圆 C 长轴的两个端点分别为 A,B，点 P 在直线 $x=1$ 上运动，直线 PA,PB 分别与椭圆 C 相交于 M,N 两个不同的点. 求证：直线 MN 与 x 轴的交点为定点. ■

■ **习题 5.8 — 2019 大兴一模理节选.** 已知椭圆 $C: \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. 过动点 $P(1,t)$ 作直线交椭圆 C 于 A,B 两点，且 $|PA|=|PB|$，过 P 作直线 l，使 l 与直线 AB 垂直. 证明：直线 l 恒过定点，并求此定点的坐标. ■

■ **习题 5.9 — 2017 顺义一模理节选.** 已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. 设动直线 $l:y=kx+m$ 与椭圆 E 相切，切点为 T，且 l 与直线 $x=-4$ 相交于点 S.

试问：在 x 轴上是否存在一定点，使得以 ST 为直径的圆恒过该定点？若存在，求出该点的坐标；若不存在，请说明理由. ■

■ **习题 5.10 — 2017 丰台一模理节选.** 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$. 过右焦点 F 的直线交椭圆 C 于 M,N 两点，交直线 $x=2$ 于点 P，设 $\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{MF},\overrightarrow{PN}=\mu\overrightarrow{NF}$，求证：$\lambda+\mu$ 为定值. ■

■ **习题 5.11 — 2015 北京卷文.** 已知椭圆 $C: x^2+3y^2=3$，过点 $D(1,0)$ 且不过点 $E(2,1)$ 的直线与椭圆 C 交于 A,B 两点，直线 AE 与直线 $x=3$ 交于点 M.

（1）求椭圆 C 的离心率；

（2）若 AB 垂直于 x 轴, 求直线 BM 的斜率；

（3）试判断直线 BM 与直线 DE 的位置关系, 并说明理由. ■

5.3 椭圆第三定义

简述 椭圆第三定义是教材通过例题体现，但是没有直接指出的一个知识点. 近年来，无论是北京还是全国其他地区，均在模拟题和高考题中涉及不少第三定义为背景的试题. 不同于上一讲我们所提到的极点极线，第三定义作为教材知识，可以规范地直接应用，进而极大地降低计算量.

目标 识别第三定义出现的模型，掌握涉及第三定义的作答格式.

5.3.1 专题例析

例题 5.7 — 人教 A 版选修第一册，P108-109. 设 A,B 两点的坐标分别为 $(-5,0)$，$(5,0)$. 直线 AM,BM 相交于点 M，且他们的斜率之积是 $-\dfrac{4}{9}$，求点 M 的轨迹方程. ■

$\boxed{\text{分析}}$ 设点 M 的坐标 (x,y)，因为点 A 的坐标是 $(-5,0)$，所以直线 AM 的斜率

$$k_{AM}=\frac{y}{x+5}(x\neq -5).$$

同理，直线 BM 的斜率

$$k_{BM}=\frac{y}{x-5}(x\neq 5).$$

由已知，有

$$\frac{y}{x+5}\times\frac{y}{x-5}=-\frac{4}{9}(x\neq\pm 5),$$

化简，得点 M 的轨迹方程为

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{\frac{100}{9}}=1(x\neq\pm 5).$$

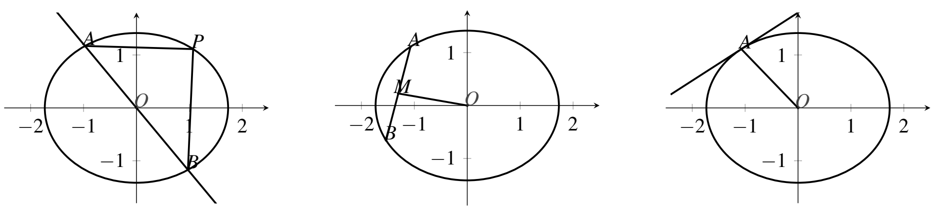
点 M 的轨迹是除去 $(-5,0)$，$(5,0)$ 两点的椭圆.

$\boxed{\text{定义}}$ 已知坐标轴上关于原点对称的两个定点，那么，到这两定点连线的斜率之积为定值 $e^2-1(0<e<1)$ 的点的轨迹是椭圆，其中，定点为短轴或长轴顶点.

$\boxed{\text{模型}}$ 情况 1:（左图）过原点直线 + 斜率 $\Rightarrow k_{PA}\cdot k_{BP}=-\dfrac{b^2}{a^2}=e^2-1$.

情况 2:（中图）重点 + 斜率 $\Rightarrow k_{OM}\cdot k_{AB}=-\dfrac{b^2}{a^2}=e^2-1$.

情况 3:（右图）切点 l+ 斜率 $\Rightarrow k_l\cdot k_{OA}=e^2-1$.



$\boxed{\text{步骤}}$ （以情况 1 为例）$A(x,y),B(-x,-y),P(m,n)$，$k_{AP}\cdot k_{PB}=\dfrac{n-y}{m-x}\cdot\dfrac{n+y}{m+x}=\dfrac{n^2-y^2}{m^2-x^2}$，

又 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow y^2=b^2\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)\\ \dfrac{m^2}{a^2}+\dfrac{n^2}{b^2}=1\Rightarrow n^2=b^2\left(1-\dfrac{m^2}{a^2}\right)\end{cases}$ $\Rightarrow$ 原式 $=\dfrac{-\dfrac{b^2}{a^2}(m^2-x^2)}{m^2-x^2}=-\dfrac{b^2}{a^2}$.

$\boxed{\text{细节}}$ 前提：$x\neq\pm m$.

例题 5.8 — 2021 丰台一模节选. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，$A(-2,0),B(2,0).P$ 为椭圆 C 上异于 A,B 的动点，直线 AP,PB 分别交直线 $x=-6$ 于 M,N 两点，连接 NA 并延长交椭圆 C 于点 Q. 求证：直线 AP,AN 的斜率之积是否未定值. ■

分析 我们发现：A,B 两点为椭圆长轴的两个顶点，进而根据第三定义的基本情况，我们设 $k_{AP}=k$，则有：$k\cdot k_{BP}=e^2-1=-\dfrac{1}{4}$.

解析 $l_{PB}:y=-\dfrac{1}{4k}(x-2)\Rightarrow y_N=-\dfrac{-8}{4k}=\dfrac{2}{k}$.

所以 $k_{AN}=\dfrac{\frac{2}{k}}{-4}=-\dfrac{1}{2k}$，$k_{AP}\cdot k_{AN}=k\cdot\left(-\dfrac{1}{2k}\right)=-\dfrac{1}{2}$.

例题 5.9 — 2019 全国 II 卷改编. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$，过原点的直线交椭圆 C 于 P,Q 两点，点 P 在第一象限，$PE\perp x$ 轴，垂足为 E，连接 QE 并延长，交椭圆于 G，证明：$\triangle PQG$ 为直角三角形. ■

分析 不难发现，过原点的直线 PQ 其实可以翻译为 P,Q 两点关于原点中心对称. 同时，根据要证明的条件可以转换为 $k_{PQ}\cdot k_{PG}=-1$，想到此题属于“过原点直线 + 斜率”型.

解析 设 $P(x_0,y_0)$，则 $Q(-x_0,-y_0)$，所以 $k_{PQ}=l_{PO}=\dfrac{x_0}{y_0}$，

因为 $k_{GQ}=k_{QE}=\dfrac{y_0}{2x_0}$，所以 $k_{GQ}=\dfrac{1}{2}k_{PQ}$，

又因为 $k_{GQ}\cdot k_{GP}=e^2-1=-\dfrac{1}{2}$，所以 $\dfrac{1}{2}k_{KQ}\cdot k_{GP}=e^2-1=\dfrac{1}{2}$，

所以 $k_{KQ}\cdot k_{GP}=-1$，$PQ\perp PG$，$\triangle PQG$ 是直角三角形.

例题 5.10 — 2020 天津卷改编. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{9}=1$，$A(0,-3)$，右焦点为 F. 若点 C 满足 $3\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OF}$，点 B 在椭圆上（异于顶点），直线 AB 与以 C 为圆心的圆相切于点 P，且 P 为线段 AB 的中点. 求直线 AB 的方程. ■

分析 通过阅读题干我们发现这道题是"重点 + 斜率"型. 进而可以通过利用 $k_{AB}\cdot k_{OP}=e^2-1$ 及相切的条件可以消去 k_{AB} 得到 k_{CP} 和 k_{OP} 的关系.

解析 设 $P(x_0,y_0)$，由题易知 $C(1,0)$ 及 $\begin{cases} k_{AB}\cdot k_{OP}=e^2-1=-\dfrac{1}{2} \\ k_{AB}\cdot k_{CP}=-1 \end{cases}$，

所以 $k_{CP}=2k_{OP}$，即 $\dfrac{y_0}{x_0-1}=2\dfrac{y_0}{x_0}$，所以 $x_0=2$.

因为 $A(0,-3)$，所以 $B(4,\pm 1)$，$l_{AB}=y=\dfrac{1}{2}x-3$ 或 $y=x-3$.

5.3.2 习题精选

■ **习题 5.12 — 2020 全国 I 卷节选.** 已知 A,B 分别为椭圆 $E:\dfrac{x^2}{9}+y^2=1(a>1)$ 的左、右顶点.P 为直线 $x=6$ 上的动点, PA 与 E 的另一交点为 C,PB 与 E 的另一交点为 D. 证明: 直线 CD 过定点. ■

■ **习题 5.13** 直线 l 与椭圆 $\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 交于 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 两点, 已知 $\vec{m}=(ax_1,by_1),\vec{n}=(ax_2,by_2)$, 若 $\vec{m}\perp\vec{n}$ 且椭圆的离心率 $e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 又椭圆过点 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},1\right)$,$O$ 为原点.

（1）求椭圆的方程.

（2）若直线 l 过椭圆的上焦点 $F(0,c)$ (c 为半焦距), 求直线 l 的斜率 k 的值.

（3）试问: $\triangle AOB$ 的面积是否为定值? 如果是, 请给予证明; 如果不是, 请说明理由. ■

■ **习题 5.14** 已知椭圆的中心为坐标原点 O, 焦点在 x 轴上, 斜率为 1 且过椭圆右焦点 F 的直线交椭圆于 A,B 两点, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ 与 $\overrightarrow{a}=(3,-1)$ 共线.

（1）求椭圆的离心率;

（2）设 M 为椭圆上任意一点, 且 $\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}(\lambda,\mu\in R)$, 证明 $\lambda^2+\mu^2$ 为定值. ■

■ **习题 5.15 — 2013 北京卷理.** 已知 A,B,C 是椭圆 $W:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 上三个点，O 是坐标原点.

（1）当点 B 是 W 的右顶点，且四边形 $OABC$ 为菱形时，求此菱形的面积;

（2）当点 B 不是 W 的顶点时，判断四边形 $OABC$ 是否可能为菱形，并说明理由. ■

■ **习题 5.16** 已知椭圆 $C: x^2+\frac{y^2}{4}=1$ 的短轴的左右两个端点分别为 A,B，直线 $l: y=kx+1$ 与 x,y 轴分别交于点 E,F，与椭圆交于两点 C,D. 设直线 AD,CB 的斜率分别为 k_1,k_2，若 $k_1:k_2=2:1$，求 k 的值. ■

■ **习题 5.17 — 2020 海淀一模节选.** 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的左右顶点为 A_1,A_2，上顶点为 B. 设 M 是椭圆 C 上一点，且不与顶点重合，若直线 A_1B 与直线 A_2M 交于点 P，直线 A_1M 与直线 A_2B 交于点 Q. 求证：$\triangle BPQ$ 为等腰三角形. ■

■ **习题 5.18** 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 设椭圆 C 的左、右焦点分别为 F_1,F_2, 左、右顶点分别为 A,B, 且 $|F_2A|,1,|F_2B|$ 成等比数列.

（1）求椭圆 C 的标准方程.

（2）过点 $P(4,0)$ 作直线 l 与椭圆 C 交于 M,N 两点（直线 l 与 x 轴不重合），设直线 AM,BN 的斜率分别为 k_1,k_2, 判断 $\dfrac{k_1}{k_2}$ 是否为定值? 若是，求出该值；若不是，请说明理由. ■

5.4 知识总结

$\boxed{1}$ **极点极线的几何特征**

首先，曲线上有 4 个点 A,B,C,D，对角线交点为 N，

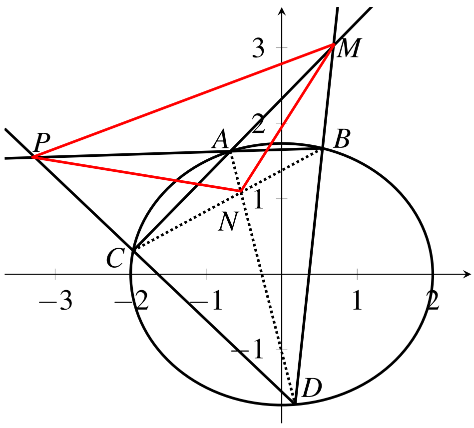
接着，延长四边形 $ABCD$ 的两组对边，分别交于点 P 和点 M，

进而，连接 MP,MN,NP，则称：

$$极点\ P——极线\ MN，极点\ M——极线\ PN，极点\ N——极线\ MP$$

同时发现：$\triangle MNP$ 中三个顶点和对边，互为极点和极线，因此为自极三角形.

相应地，依托于自极三角形，我们给出配极原则：设点 P 关于圆锥曲线 C 的极线 l 经过点 $Q \Leftrightarrow$ 点 Q 关于 C 的极线 g 经过点 P.

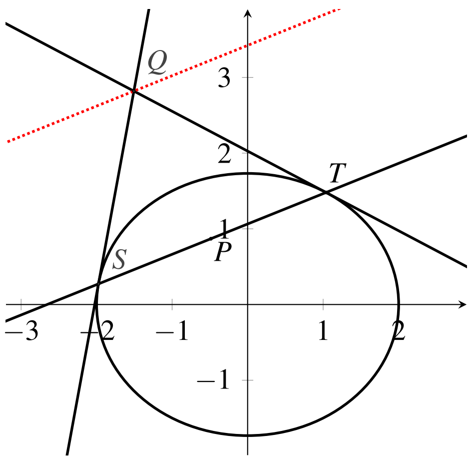


$\boxed{2}$ **极点极线与切线**

（1）点在圆锥曲线上，该点关于圆锥曲线的切线即为极线；

（2）点在圆锥曲线外，过点做该点关于圆锥曲线的两条切线，将两个切点连接，其切点弦即为极线；

（3）点在圆锥曲线内，过点作直线 ST 交圆锥曲线于 S,T，作 S,T 关于圆锥曲线的两条切线交于 Q，作 QQ' 与直线 ST 平行，则 QQ' 为点 P 关于圆锥曲线的极线，如下图：



3 极点极线的代数方程

（1）极点 $P(x_0,y_0)$ 关于椭圆和双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}\pm\dfrac{x^2}{b^2}=1$ 对应的极线为 $\dfrac{xx_0}{a^2}\pm\dfrac{yy_0}{b^2}=1$；

（2）极点 $P(x_0,y_0)$ 关于抛物线 $y^2=2px$ 对应的极线为 $y_0y=0(x+x_0)$；

（3）圆锥曲线的焦点和准线，是极点和极线关系.

4. 极点极线的性质

（1）调和性：过点 P 任作直线交曲线于 A,B，交极线于 Q，则 P,A,Q,B 四点构成“调和点列”，有：$\dfrac{1}{PA}+\dfrac{1}{PB}=\dfrac{2}{PQ}$；

（2）共轭性：B,Q,A,P 四点构成“调和点列”，也有 $\dfrac{1}{BQ}+\dfrac{1}{BP}=\dfrac{2}{BA}$；

（3）等比性：点 Q,P 为 AB 的内外分点，则 $\dfrac{|QA|}{|QB|}=\dfrac{|PA|}{|PB|}=\lambda$.

特殊地，当直线经过曲线中心 O 时，$|OA|^2=|OB|^2=|OP||OQ|$.

II 习题部分

CHAPTER 6. 高考真题

■ **习题 6.1 — 2021 新高考 II 卷.** 已知椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，右焦点为 $F(\sqrt{2},0)$，且离心率为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）设 M,N 是椭圆 C 上的两点，直线 MN 与曲线 $C_1:x^2+y^2=b^2(x>0)$ 相切. 证明：M,N,F 三点共线的充要条件是 $|MN|=\sqrt{3}$. ■

■ **习题 6.2 — 2021 北京卷.** 已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}(a>b>0)$ 过点 $A(0,-2)$，以四个顶点所围成的四边形面积为 $4\sqrt{5}$.

（1）求椭圆 E 的标准方程；

（2）过点 $P(0,-3)$ 的直线 l 斜率为 k，交椭圆 E 于不同的两点 B,C，直线 AB,AC 交 $y=-3$ 于点 M,N，若 $|PM|+|PN|\le 15$，求 k 的取值范围. ■

■ **习题 6.3 — 2021 天津卷.** 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，上顶点为 B，右焦点为 F，$|BF|=\sqrt{5}$.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）若直线 l 与椭圆 C 有唯一的公共点 M，与 y 轴的正半轴相交于点 N，过点 N 作 BF 的垂线交 x 轴于点 P，若 $MP\parallel BF$，求直线 l 的方程. ■

■ **习题 6.4 — 2020 全国 I 卷.** 已知 A,B 分别为椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$ 的左、右，G 为 E 的上顶点，$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{GB}=8$.

（1）求 E 的方程；

（2）证明：直线 CD 过定点. ■

■ **习题 6.5 — 2020 全国 III 卷.** 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{m^2}=1(0<m<5)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，A,B 分别为 C 的左、右顶点.

（1）求 C 的方程；

（2）若点 P 在 C 上，点 Q 在直线 $x=6$，且 $|BP|=|BQ|$，$BP\perp BQ$，求 $\triangle APQ$ 的面积. ■

■ **习题 6.6 — 2020 北京卷.** 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 过点 $A(-2,-1)$，且 $a=2b$.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）过点 $B(-4,0)$ 的直线 l 交椭圆 C 于点 M,N. 直线 MA,NA 分别交直线 $x=-4$ 于点 P,Q. 求 $\dfrac{|PB|}{|BQ|}$. ■

■ **习题 6.7 — 2019 北京卷文.** 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的右焦点 $(1,0)$，且经过点 $A(0,1)$.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）设 O 为原点，直线 $l:y=kx+t(t\neq\pm1)$ 与椭圆 C 交于两个不同点 P,Q，直线 AP 与 x 轴交于点 M，直线 AQ 与 x 轴交于点 N，若 $|OM|\cdot|ON|=2$，求证：直线 l 经过定点. ■

■ **习题 6.8 — 2018 北京卷文.** 已知椭圆 $M:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，焦距为 $2\sqrt{2}$. 斜率为 k 的直线 l 与椭圆 M 有两个不同的交点 A,B.

（1）求椭圆 M 的方程；

（2）若 $k=1$，求 $|AB|$ 的最大值；

（3）设 $P(-2,0)$，直线 PA 与椭圆 M 的另一个交点为 C，直线 PB 与椭圆 M 的另一个交点为 D. 若 C,D 和点 $Q\left(-\dfrac{7}{4},\dfrac{1}{4}\right)$ 共线，求 k. ■

■ **习题 6.9 — 2017 北京卷文.** 已知椭圆 C 的两个顶点分别为 $A(-2,0),B(2,0)$，焦点在 x 轴上，离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）点 D 为 x 轴上一点，过 D 作 x 轴的垂线交椭圆 C 于不同的两点 M,N，过 D 作 AM 的垂线交 BN 于点 E. 求证：$\triangle BDE$ 与 $\triangle BDN$ 的面积之比为 $4:5$. ■

■ **习题 6.10 — 2016 北京卷文.** 已知椭圆 $C: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 过点 $A(2,0), B(0,1)$ 两点.

（1）求椭圆 C 的方程及离心率；

（2）设 P 为第三象限内一点且在椭圆 C 上，直线 PA 与 y 轴交于点 M，直线 PB 与 x 轴交于点 N，求证：四边形 $ABNM$ 的面积为定值. ■

■ **习题 6.11 — 2016 北京卷理.** 已知椭圆 $C: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$A(a,0)$，$B(0,b)$，$O(0,0)$，$\triangle OAB$ 的面积为 1.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）设 P 是椭圆 C 上的一点，直线 PA 与 y 轴交于点 M，直线 PB 与 x 轴交于点 N，求证：$|AN|\cdot|BM|$ 为定值. ■

■ **习题 6.12 — 2015 北京卷文.** 已知椭圆 $C: x^2+3y^2=3$，过点 $D(1,0)$ 且不过点 $E(2,1)$ 的直线与椭圆 C 交于 A,B 两点，直线 AE 与直线 $x=3$ 交于点 M.

（1）求椭圆 C 的离心率；

（2）若 AB 垂直于 x 轴，求直线 BM 的斜率；

（3）试判断直线 BM 与直线 DE 的位置关系，并说明理由. ■

■ **习题 6.13 — 2015 北京卷理.** 已知椭圆 $C: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，点 $P(0,1)$，和点 $A(m,n(m\neq 0))$ 都在椭圆 C 上，直线 PA 交 x 轴于点 M.

（1）求椭圆 C 的方程，并求点 M 的坐标（用 m,n 表示）；

（2）设 O 为原点，点 B 与点 A 关于 x 轴对称，直线 PB 交 x 轴于点 N. 问：y 轴上是否存在点 Q，使得 $\angle OQM=\angle ONQ$? 若存在，求点 Q 的坐标；若不存在，说明理由. ■

■ **习题 6.14 — 2014 北京卷.** 已知椭圆 $C: x^2+2y^2=4$，设 O 为原点.

（1）求椭圆 C 的离心率；

（2）若点 A 在直线 $y=2$，点 B 在椭圆 O 上，且 $OA \perp OB$，求线段 AB 长度的最小值.

(3) 若点 A 在椭圆 C 上，点 B 在直线 $y=2$ 上，且 $OA \perp OB$，求直线 AB 与圆 $x^2+y^2=2$ 的位置关系，并证明你的结论. ■

CHAPTER 7. 模拟试题

7.1 高三期末

7.1.1 2020 届

■ **习题 7.1 — 2020 东城期末.** 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$ 的离心率是 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

（1）求椭圆 C 的方程;

（2）已知 F_1,F_2 分别是椭圆 C 的左, 右焦点，过 F_2 作斜率为 k 的直线 l，交椭圆 C 于 A,B 两点，直线 F_1A,F_1B 分别交于 y 轴不同的两点 M,N. 如果 $\angle MF_1N$ 为锐角，求 k 的取值范围. ■

■ **习题 7.2 — 2020 西城期末.** 已知椭圆 $W:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 的右焦点为 F，过点 F 且斜率为 $k(k\neq 0)$ 的直线 l 与椭圆 W 交于 A,B 两点，线段 AB 的中点为 $M.O$ 为坐标原点.

（1）证明：点 M 在 y 轴的右侧；

（2）设线段 AB 的垂直平分线与 x 轴、y 轴分别相交于点 C,D. 若 $\triangle ODC$ 与 $\triangle CMF$ 的面积相等，求直线 l 的斜率 k. ■

■ **习题 7.3 — 2020 海淀期末.** 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右顶点 $A(2,0)$，且离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）设 O 为原点，过点 O 的直线 l 与椭圆 C 交于两点 P,Q，直线 AP 和 AQ 分别与直线 $x=4$ 交于点 M,N. 求 $\triangle APQ$ 与 $\triangle AMN$ 的面积之和的最小值. ■

■ **习题 7.4 — 2020 朝阳期末.** 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点 $P\left(-1,\dfrac{3}{2}\right)$，且椭圆 C 的一个顶点 D 的坐标为 $(-2,0)$. 过椭圆 C 的右焦点 F 的直线 l 与椭圆 C 交于不同的两点 A,B（A,B 不同于点 D），直线 DA 与直线 $m:x=4$ 交于点 M，连接 MF，过点 F 作 MF 的垂线与直线 m 交于点 N.

（1）求椭圆 C 的方程，并求点 F 的坐标；

（2）求证：D,B,N 三点共线. ■

■ **习题 7.5 — 2020 丰台期末.** 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{1}{2}$，以原点为圆心，椭圆 C 的短半轴长为半径的圆与直线 $x-y+\sqrt{6}=0$ 相切.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）设 S 为椭圆 C 的右顶点，过椭圆 C 的右焦点的直线 l 与椭圆 C 交于 P,Q 两点（异于 S），直线 PS,QS 分别交直线 $x=4$ 于 A,B 两点. 求证：A,B 两点的纵坐标之积为定值. ■

■ **习题 7.6 — 2020 顺义期末.** 已知椭圆 $C: 3x^2+4y^2=12$.

（1）求椭圆 C 的离心率；

（2）设 A,B 分别为椭圆 C 的左右顶点，点 P 在椭圆 C 上，直线 AP,BP 分别与直线 $x=4$ 相交于点 M,N，当点 P 运动时，以 M,N 为直径的圆是否经过 x 轴上的定点. 试证明你的结论. ■

7.1.2 2021 届

■ **习题 7.7 — 2021 东城期末.** 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点 $A(-2,0)$，$B(2,0)$，且离心率为 $\dfrac{1}{2}$.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）设直线 l 与椭圆 C 有且仅有一个公共点 E，且与 x 轴交于点 G(点 E,G 不重合),$ET\perp x$ 轴，垂足为 T. 求证：$\dfrac{|TA|}{|TB|}=\dfrac{|GA|}{|GB|}$. ■

■ **习题 7.8 — 2021 西城期末.** 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$.

（1）求椭圆 C 的离心率和长轴长；

（2）已知直线 $y=kx+2$ 与椭圆 C 有两个不同的交点 A,B，P 为 x 轴上一点. 是否存在实数 k，使得 $\triangle PAB$ 是以点 P 为直角顶点的等腰直角三角形？若存在，求出 k 的值及点 P 的坐标；若不存在，说明理由. ■

■ **习题 7.9 — 2021 海淀期末.** 已知椭圆 $W:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，且经过点 $C(2,\sqrt{3})$.

（1）求椭圆 W 的方程及其长轴长；

（2）A,B 分别为椭圆 W 的左、右顶点，点 D 在椭圆 W 上，且位于 x 轴下方，直线 CD 交 x 轴于点 Q，若 $\triangle ACQ$ 的面积比 $\triangle BDQ$ 的面积大 $2\sqrt{3}$，求点 D 的坐标. ■

■ **习题 7.10 — 2021 朝阳期末.** 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点 $\left(1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，且 C 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）过点 $P(1,0)$ 的直线 l 交椭圆 C 于 A,B 两点，求 $|PA|\cdot|PB|$ 的取值范围. ■

■ **习题 7.11 — 2021 丰台期末.** 已知椭圆 $W:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过 $A(0,2)$，$B(-3,-1)$ 两点.

（1）求椭圆 W 的方程；

（2）直线 AB 与 x 轴交于点 $M(m,0)$，过点 M 作不垂直于坐标轴且与 AB 不重合的直线 l，l 与椭圆 W 交于 C,D 两点，直线 AC,BD 分别交直线 $x=m$ 于 P,Q 两点，求证：$\dfrac{|PM|}{|MQ|}$ 为定值. ■

■ **习题 7.12 — 2021 顺义期末.** 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点 $M(0,1)$ 和 $N\left(\sqrt{3},\dfrac{1}{2}\right)$.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）直线 $l:y=kx+m$ 与椭圆 C 交于 A,B 两点，且坐标原点 O 到直线 l 的距离为 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. 求证：以 AB 为直径的圆经过点 O. ■

7.1.3 2022 届

■ **习题 7.13 — 2022 东城期末.** 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 过点 $A(-\sqrt{3},0)$，其右焦点 $F(1,0)$.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）设 P 为椭圆 C 上一动点 (不在 x 轴上)，M 为 AP 中点，过原点 O 作 AP 的平行线，与直线 $x=3$ 交于点 Q. 问：直线 OM 与 FQ 斜率的乘积是否为定值？若为定值，求出该值；若不为定值，请说明理由. ■

■ **习题 7.14 — 2022 西城期末.** 已知椭圆 $M:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的焦点为 $F(2,0)$，长轴长与短轴长的比值为 $\sqrt{2}$.

（1）求椭圆 M 的方程；

（2）过点 F 的直线 l 与椭圆 M 交于 A,B 两点，$BC\perp x$ 轴于点 C，$AD\perp x$ 轴于点 D，直线 BD 交直线 $x=4$ 于点 E，求 $\triangle ECD$ 与 $\triangle EAB$ 的面积之比. ■

■ **习题 7.15 — 2022 海淀期末.** 已知点 $A(0,-1)$ 在椭圆 $C:\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上.

（1）求椭圆 C 的方程和离心率；

（2）设直线 $l:y=k(x-1)$(其中 $k\neq 1$) 与椭圆 C 交于不同两点 E,F，直线 AE,AF 分别交直线 $x=3$ 于点 M,N. 当 $\triangle AMN$ 的面积为 $3\sqrt{3}$ 时，求 k 的值. ■

■ **习题 7.16 — 2022 朝阳期末.** 已知曲线 $W:\dfrac{x^2}{3-m}+\dfrac{y^2}{m}=1(m\in\mathbb{R},m\neq 0\text{且}m\neq 3)$.

（1）若曲线 W 是焦点在 x 轴上的椭圆，求 m 的取值范围；

（2）当 $m=1$ 时，过点 $E(1,0)$ 作斜率为 $k(k\neq 0)$ 的直线 l 交曲线 W 于点 A,B（A,B 异于顶点)，交直线 $x=2$ 于 P. 过点 P 作 y 轴的垂线，垂足为 Q，直线 AQ 交 x 轴于 C，直线 BQ 交 x 轴于 D，求线段 CD 中点 M 的坐标. ■

■ **习题 7.17 — 2022 丰台期末.** 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点 $(\sqrt{2},1)$，离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）设椭圆 C 的右顶点为 A，过点 $D(4,0)$ 的直线 l 与椭圆 C 交于不同的两点 M,N（均异于点 A），直线 AM,AN 分别与直线 $x=4$ 交于点 P,Q. 求证：$|DP|\cdot|DQ|$ 为定值. ■

■ **习题 7.18 — 2022 顺义期末.** 已知椭圆 $W:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 过点 $A(0,-1)$，且离心率 $e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

（1）求椭圆 W 的方程；

（2）点 B 在直线 $x=4$ 上，点 B 关于 x 轴的对称点为 B_1，直线 AB,AB_1 分别交椭圆 W 于 C,D 两点（不同于 A 点）. 求证：直线 CD 过定点. ■

7.2 高三一模

7.2.1 2020 届

■ **习题 7.19 — 2020 东城一模.** 已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，其上、下定点分别为 A,B，左、右焦点分别为 F_1,F_2，若四边形 AF_1BF_2 为正方形，且面积为 2.

（1）求椭圆 E 的标准方程；

（2）设存在斜率不为 0 且平行的两条直线 l_1,l_2，它们与椭圆 E 分别交于点 C,D,M,N，且四边形 $CDMN$ 是菱形，求出该菱形周长的最大值. ■

■ **习题 7.20 — 2020 西城一模.** 设椭圆 $E:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$，直线 l_1 经过点 $M(m,0)$，直线 l_2 经过点 $N(n,0)$，直线 $l_1\parallel$ 直线 l_2，且直线 l_1,l_2 分别与椭圆 E 相交于 A,B 两点和 C,D 两点.

（1）若 M,N 分别为椭圆 E 的左、右焦点，且直线 $l_1\perp x$ 轴，求四边形 $ABCD$ 的面积；

（2）若直线 l_1 的斜率存在且不为 0，四边形 $ABCD$ 为平行四边形，求证：$m+n=0$.

（3）在（2）的条件下，判断四边形 $ABCD$ 能否为矩形，说明理由. ■

■ **习题 7.21 — 2020 海淀一模.** 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,$A_1(-a,0)$,$A_2(a,0)$,$B(0,b)$,$\triangle A_1BA_2$ 的面积为 2.

（1）求椭圆 C 的方程;

（2）设 M 是椭圆 C 上一点，且不与顶点重合，若直线 A_1B 与直线 A_2M 交于点 P，直线 A_1M 与直线 A_2B 交于点 Q. 求证：$\triangle BPQ$ 为等腰三角形. ■

■ **习题 7.22 — 2020 朝阳一模.** 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，圆 $O:x^2+y^2=r^2$（O 为坐标原点）. 过点 $(0,b)$ 且斜率为 1 的直线与圆 O 交于点 $(1,2)$，与椭圆 C 的另一个交点的横坐标为 $-\dfrac{8}{5}$.

（1）求椭圆 C 的方程和圆 O 的方程;

（2）过圆 O 上的动点 P 作两条互相垂直的直线 l_1,l_2，若直线 l_1 的斜率为 $k(k\neq 0)$ 且 l_1 与椭圆 C 相切，试判断直线 l_2 与椭圆 C 的位置关系，并说明理由. ■

■ **习题 7.23 — 2020 丰台一模.** 已知椭圆 $C:\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，点 $P(1,0)$ 在椭圆 C 上，直线 $y=y_0$ 与椭圆 C 交于不同的两点 A,B.

（1）求椭圆 C 的方程；

(2) 直线 PA,PB 分别交于 M,N 两点，问：x 轴上是否存在点 Q，使得 $\angle OQN+\angle OQM=\dfrac{\pi}{2}$？若存在，求出点 Q 的坐标；若不存在，请说明理由. ■

7.2.2 2021 届

■ **习题 7.24 — 2021 东城一模.** 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点 $D(-2,0)$，且焦距为 $2\sqrt{3}$.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）过点 $A(-4,0)$ 的直线 l（不与 x 轴重合）与椭圆 C 交于 P,Q 两点，点 T 与点 Q 关于 x 轴对称，直线 TP 与 x 轴交于 H. 是否存在常数 λ，使得 $|AD|\cdot|DH|=\lambda(|AD|-|DH|)$ 成立，若存在，求出 λ 的值；若不存在，说明理由. ■

■ **习题 7.25 — 2021 西城一模.** 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{3}=1(a>0)$ 的焦点在 x 轴上，经过点 $E\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$，左顶点为 D，右焦点为 F.

（1）求椭圆 C 的离心率和 $\triangle DEF$ 的面积；

（2）已知直线 $y=kx+1$ 与椭圆 C 交于 A,B 两点. 过点 B 作直线 $y=t(t>\sqrt{3})$ 的垂线，垂足为 G. 判断是否存在常数 t，使得直线 AG 经过 y 轴上的定点？若存在，求 t 的值；若不存在，请说明理由. ■

■ **习题 7.26 — 2021 海淀一模.** 已知椭圆 $M:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过 $A(-2,0),B(0,1)$ 两点.

（1）求椭圆 M 的离心率；

（2）设椭圆 M 的右顶点为 C，点 P 在椭圆 M 上（点 P 不与椭圆 M 的顶点重合），直线 AB 与直线 CP 交于点 Q，直线 BP 交 x 轴于点 S，求证：直线 SQ 过定点. ■

■ **习题 7.27 — 2021 朝阳一模.** 已知椭圆 C 的短轴的两个端点分别为 $A(0,1),B(0,-1)$，离心率为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

（1）求椭圆 C 的方程及焦点的坐标；

（2）若点 M 为椭圆 C 上异于 A,B 的任意一点，过原点且与直线 MA 平行的直线与直线 $y=3$ 交于点 P，直线 MB 与直线 $y=3$ 交于点 Q，试判断以线段 PQ 为直径的圆是否经过定点？若过定点，求出定点的坐标；若不过定点，请说明理由. ■

■ **习题 7.28 — 2021 丰台一模.** 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 长轴的两个端点分别为 $A(-2,0),B(2,0)$，离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）P 为椭圆 C 上异于 A,B 的动点，直线 AP,PB 分别交直线 $x=-6$ 于 M,N 两点，连接 NA 并延长交椭圆 C 于点 Q.

（i）求证：直线 AP,AN 的斜率之积为定值；

（ii）判断 M,B,Q 三点是否共线，并说明理由. ■

7.3 高三二模

7.3.1 2020 届

■ **习题 7.29 — 2020 东城二模.** 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一个顶点坐标为 $A(0,-1)$，离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）若直线 $y=k(x-1)(k\neq 0)$ 与椭圆 C 交于不同的两点 P,Q，线段 PQ 的中点为 M，点 $B(1,0)$，求证：点 M 不在以 AB 为直径的圆上. ■

■ **习题 7.30 — 2020 西城二模.** 已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过点 $C(0,1)$，离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，O 为坐标原点.

（1）求椭圆 E 的方程；

（2）设 A,B 分别为椭圆 E 的左右顶点，D 为椭圆上一点（不在坐标轴上），直线 CD 交 x 轴于点 P,Q 为直线 AD 上一点，且 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=4$，求证：$C,B,Q$ 三点共线. ■

■ **习题 7.31 — 2020 海淀二模.** 已知椭圆 $W:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过 $A(0,1),B(0,-1)$ 两点，离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

（1）求椭圆 W 的方程；

（2）过点 A 的直线 l 与椭圆 W 的另一个交点为 C，直线 l 交直线 $y=2$ 于点 M，记直线 BC,BM 的斜率分别为 k_1,k_2，求 k_1k_2 的值. ■

■ **习题 7.32 — 2020 朝阳二模.** 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，且椭圆 C 经过点 $\left(1,\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）已知过点 $P(4,0)$ 的直线 l 与椭圆 C 交于不同的两点 A,B，与直线 $x=1$ 交于点 Q，设 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB},\overrightarrow{AQ}=\mu\overrightarrow{QB}(\lambda,\mu\in\mathbb{R})$，求证：$\lambda+\mu$ 为定值. ■

■ **习题 7.33 — 2020 丰台二模.** 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过 $A(1,0),B(0,b)$ 两点.O 为坐标原点，且 $\triangle AOB$ 的面积为 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，过点 $P(0,1)$ 且斜率为 $k(k>0)$ 的直线 l 与椭圆 C 有两个不同的交点 M,N，且直线 AM,AN 分别与 y 轴交于点 S,T.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）求直线 l 的斜率 k 的取值范围；

（3）设 $\overrightarrow{PS}=\lambda\overrightarrow{PO},\overrightarrow{PT}=\mu\overrightarrow{PO}$，求 $\lambda+\mu$ 的取值范围. ■

■ **习题 7.34 — 2020 顺义二模.** 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的焦距和长半轴长都为 2，过椭圆 C 的右焦点 F 作斜率为 $k(k\neq 0)$ 的直线 l 与椭圆 C 相交于 P,Q 两点.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）设点 A 是椭圆 C 的左顶点，直线 AP,AQ 分别与直线 $x=4$ 相交于点 M,N.

求证：以 MN 为直径的圆恒过点 F. ■

7.3.2 2021 届

■ **习题 7.35 — 2021 东城二模.** 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 F，左、右顶点分别为 $A(-2,0),B(2,0)$，$|AF|=3|FB|$.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）设过 $P(2,1)$ 的直线 l 与椭圆 C 交于不同的两点 M,N，过点 N 作 x 轴的垂线，与直线 BM 交于点 D，E 为线段 DN 的中点. 证明：直线 BE 的斜率为定值. ■

■ **习题 7.36 — 2021 西城二模.** 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，其长轴的两个端点分别为 $A(-3,0),B(3,0)$.

（1）求椭圆 C 的标准方程了；

（2）点 P 为椭圆上除 A,B 外的任意一点，直线 AP 交直线 $x=4$ 于点 E，点 O 为坐标原点，过点 O 且与直线 BE 垂直的直线记为 l，直线 BP 交 y 轴于点 M，交直线 l 于点 N，求 $\triangle BMO$ 与 $\triangle NMO$ 的面积之比. ■

■ **习题 7.37 — 2021 海淀二模.** 椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，E 是椭圆 C 上一点，且 $|F_1F_2|=2$，$|EF_1|+|EF_2|=4$.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）M,N 是 y 轴上的两个动点（点 M 与点 E 位于 x 轴的两侧），$\angle MF_1N=\angle MEN=90^\circ$，直线 EM 交 x 轴于点 P，求 $\dfrac{|EP|}{|PM|}$ 的值. ■

■ **习题 7.38 — 2021 朝阳二模.** 已知 F 为椭圆 $C:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 的左焦点，直线 $l:y=k(x-2)$ 与椭圆 C 交于不同的两点 M,N.

（1）当 $k=-\dfrac{1}{2}$ 时，求 $\triangle FMN$ 的面积；

（2）设直线 FM,FN 分别与直线 $x=1$ 交于两点 P,Q，线段 MN,PQ 的中点分别为 G,H，点 $A\left(\dfrac{1}{5},0\right)$，当 k 变化时，证明 A,G,H 三点共线. ■

■ **习题 7.39 — 2021 丰台二模.** 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$，过点 $(-1,0)$ 的直线 l 交椭圆 C 于点 A,B.

（1）当直线 l 与 x 轴垂直时，求 $|AB|$；

（2）在 x 轴上是否存在定点 P，使 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 为定值? 若存在，求点 P 的坐标即 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的值；若不存在，说明理由. ■

■ **习题 7.40 — 2021 顺义二模.** 已知椭圆 $G:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，且过点 $(2,\sqrt{2})$.

（1）求椭圆 G 的方程；

（2）过点 $M(0,1)$ 且斜率为 $k(k\neq 0)$ 的直线 l 交椭圆 G 于 A,B 两点，在 y 轴上是否存在点 N 使得 $\angle ANM=\angle BNM$（点 N 与点 M 不重合）? 若存在，求出点 N 的坐标，若不存在，请说明理由. ■