

5. 已知函数 $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$, 则

- A. $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6})$ 上单调递减
 B. $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{12})$ 上单调递减
 C. $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{3})$ 上单调递减
 D. $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{12})$ 上单调递减

[答案]C. [解析] $f(x) = \cos 2x$. 令 $2x \in (2k\pi, \pi + 2k\pi)$, 解得 $x \in (k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$. 代入验证得 C 正确.

6. 设 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的无穷等差数列, 则“ $\{a_n\}$ 为递增数列”是“存在正整数 N_0 , 当 $n > N_0$ 时, $a_n > 0$ ”的

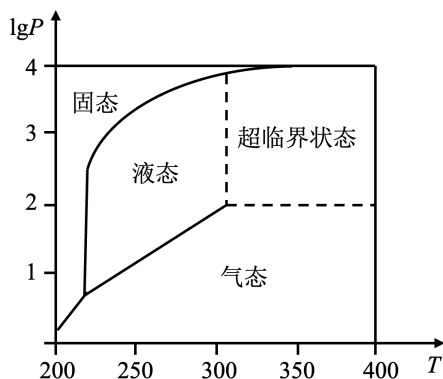
- A. 充分而不必要条件
 B. 必要而不充分条件
 C. 充分必要条件
 D. 既不充分也不必要条件

[答案]C. [解析] 设 $a_n = a_1 + (n-1)d (d \neq 0)$. 先看充分性, 当 $\{a_n\}$ 为递增数列时, 若 $a_1 > 0$, 成立; 若 $a_1 < 0$ 时, 当 $n > N_0 = 1 + [\frac{a_1}{d}]$ 时, $a_n > 0$, 成立. 再看必要性, 存在正整数 N_0 , 当 $n > N_0$ 时, $a_n > 0$, 若 a_n 为递减数列, 则 $d < 0$, 当 $a_1 < 0$ 时, $a_n < 0$; 当 $a_1 > 0$ 时, 当 $n > 1 + [\frac{a_1}{d}]$ 时, $a_n < 0$, 矛盾, 因此必要性也成立.

[点评] 本题的命题背景应该为数列极限. 在此背景下容易理解.

7. 在北京冬奥会上, 国家速滑馆“冰丝带”使用高效环保的二氧化碳临界直冷制冰技术, 为实现绿色冬奥做出了贡献. 如图描述了在一定条件下二氧化碳所处的状态与 T 和 $\lg P$ 的关系, 其中 T 表示温度, 单位是 K ; P 表示压强, 单位是 bar . 下列结论中正确的是

- A. 当 $T = 220, P = 1026$ 时, 二氧化碳处于液态
 B. 当 $T = 270, P = 128$ 时, 二氧化碳处于气态
 C. 当 $T = 300, P = 9987$ 时, 二氧化碳处于超临界状态
 D. 当 $T = 360, P = 729$ 时, 二氧化碳处于超临界状态



[答案]D. [解析] A 项, $P = 1026$, $\lg P$ 略大于 3, 因此当 $T = 220$ 时二氧化碳处于固态; B 项, $P = 128$, $\lg P$ 略大于 2, 因此当 $T = 270$ 时二氧化碳处于液态; C 项, 如图, 虚线在 $T = 300$ 右侧, 因此二氧化碳处于液态; D 项, $P = 729$, $\lg P \in (2, 3)$, 当 $T = 360$ 时, 二氧化碳处于超临界状态.

8. 若 $(2x - 1)^4 = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, 则 $a_0 + a_2 + a_4 =$

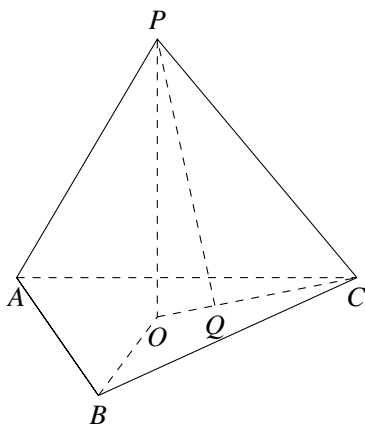
- A. 40
B. 41
C. -40
D. -41

[答案]B. [解析] 当 $x = 1$ 时, $S_1 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1$; 当 $x = -1$ 时, $S_2 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 = (-2 - 1)^4 = 81$, 因此 $a_0 + a_2 + a_4 = \frac{S_1 + S_2}{2} = 41$.

9. 已知正三棱锥 $P-ABC$ 的六条棱长均为 6, S 是 $\triangle ABC$ 及其内部的点构成的集合. 设集合 $T = \{Q \in S \mid PQ \leq 5\}$, 则 T 表示的区域的面积为

- A. $\frac{3\pi}{4}$
B. π
C. 2π
D. 3π

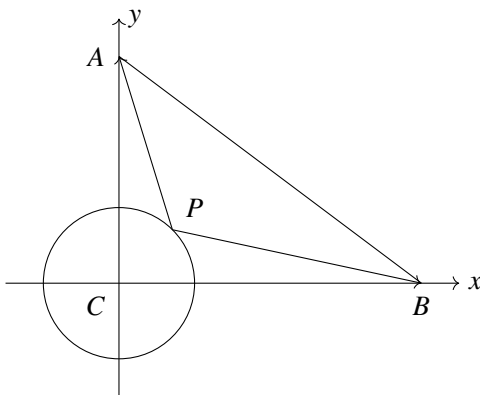
[答案]B. [解析] 容易想到, 本题所求的区域即是 $\triangle ABC$ 中的圆 O , 下面求其半径: 首先, 在底面 $\triangle ABC$ 中, 根据由于 $AB = BC = CA = 6$, 且 O 为其中心点, 因此 $CO = \frac{2}{3}h_{AB} = 2\sqrt{3}$, 又 $PO = \sqrt{PC^2 - CO^2} = 2\sqrt{6}$, PQ 为最大距离 5, 因此半径 $OQ = \sqrt{PQ^2 - PO^2} = 1$. 因此圆 O 的面积为 π .



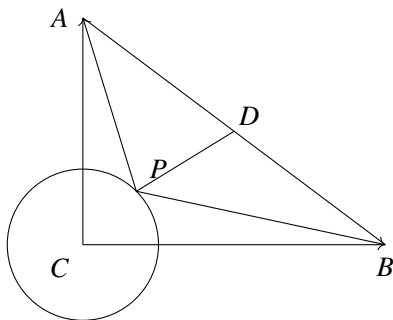
10. 在 $\triangle ABC$ 中, $AC = 3$, $BC = 4$, $\angle C = 90^\circ$. P 为 $\triangle ABC$ 所在平面内的动点, 且 $PC = 1$, 则 $\vec{PA} \cdot \vec{PB}$ 的取值范围是

- A. $[-5, 3]$
B. $[-3, 5]$
C. $[-6, 4]$
D. $[-4, 6]$

[答案]D. [法 1. 建系法] 由 $PC = 1$, 知 P 点轨迹为以 C 为圆心半径为 1 的圆. 因此以 C 为圆心, \vec{CA}, \vec{CB} 为 x, y 轴正方形建系 xOy , 则 $P(\cos \theta, \sin \theta) (0 \leq \theta \leq 2\pi)$. 所以 $\vec{PA} \cdot \vec{PB} = (3 - \cos \theta, -\sin \theta) \cdot (-\cos \theta, 4 - \sin \theta) = 1 - 5 \sin(\theta + \varphi) (\varphi = \arctan \frac{3}{4})$. 因此 $\vec{PA} \cdot \vec{PB}$ 的取值范围是 $[-4, 6]$.



[法 2. 极化恒等式] 取 AB 中点 D , $\vec{PD} + \vec{DA}, \vec{PB} = \vec{PD} + \vec{DB}, \vec{PA} \cdot \vec{PB} = (\vec{PD} + \vec{DA})(\vec{PD} + \vec{DB}) = \vec{PD}^2 - \vec{DA}^2 = \vec{PD}^2 - \frac{25}{4}$, 又 $CD - CP \leq |\vec{PD}| \leq CD + CP$, 故 $\frac{3}{2} \leq |\vec{PD}| \leq \frac{7}{2}$, 则 $-4 \leq \vec{PA} \cdot \vec{PB} \leq 6$.



第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、填空题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分。

11. 函数 $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{1-x}$ 的定义域是_____.

[答案] $(-\infty, 0) \cup (0, 1]$. [解析] 由题,
$$\begin{cases} x \neq 0, \\ 1-x \geq 0. \end{cases}$$
 解得 $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1]$.

12. 已知双曲线 $y^2 + \frac{x^2}{m} = 1$ 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$, 则 $m =$ _____.

[答案]-3. [解析] 双曲线渐近线方程为 $y \pm \frac{x}{\sqrt{-m}} = 0$, 因此 $-m = 3$, $m = -3$.

[点评] 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的渐近线方程可用 $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$ 表示.

13. 若函数 $f(x) = A \sin x - \sqrt{3} \cos x$ 的一个零点为 $\frac{\pi}{3}$, 则 $A =$ _____; $f(\frac{\pi}{12}) =$ _____.

[答案] 1; $-\sqrt{2}$. **[解析]** 由于 $f(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}A - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$, 解得 $A = 1$. 因此 $f(\frac{\pi}{12}) = -2 \sin \frac{\pi}{4} = -\sqrt{2}$.

14. 设函数 $f(x) = \begin{cases} -ax+1, & x < a, \\ (x-2)^2, & x \geq a. \end{cases}$ 若 $f(x)$ 存在最小值, 则 a 的一个取值为 _____; a 的最大值为 _____.

[答案] 0; 1. **[解析]** 由函数解析式, 发现: 当 $x < a$ 时, 取不到 $f(a) = -ax + 1$. 因此需要使 $f(a) = (a-2)^2 \leq -a^2 + 1$, 解得 $a \leq 1$. 同时, 当 $a < 0$ 时, $-ax + 1 \in (-\infty, -ax + 1)$, 无最小值. 因此, $a \in [0, 1]$.

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 其前 n 项和 S_n 满足 $a_n \cdot S_n = 9 (n = 1, 2, \dots)$. 给出下列四个结论:

① $\{a_n\}$ 的第 2 项小于 3; ② $\{a_n\}$ 为等比数列; ③ $\{a_n\}$ 为递减数列; ④ $\{a_n\}$ 中存在小于 $\frac{1}{100}$ 的项.

其中所有正确结论的序号是 _____.

[答案] ①③④. **[解析]** ①项, 由题, $a_1 \cdot S_1 = a_1^2 = 9$, 解得 $a_1 = 3$, 由 $a_2 \cdot (3 + a_2) = 9$ 解得 $a_2 = \frac{2\sqrt{10}-3}{2} < 3$, 正确; ②项, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{S_n}{S_{n+1}}$ 不为常数, 错误; ③项, 由于 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 因此 S_n 呈递增趋势, 因此 $a_n = \frac{9}{S_n}$ 递减, 正确; ④项, 由③, 数列 $\{a_n\}$ 呈递减且各项为正, 因此必存在小于 $\frac{1}{100}$ 的项. 如当 $n > 90000$ 时, 则 $a_n \leq \frac{1}{100}$, $S_n > 900$, 因此 $a_n S_n > 9$, 正确.

[点评] 本题命题背景仍为数列极限, 考察了极限的数学思想和逻辑推理的核心素养.

三、解答题共 6 小题, 共 85 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

16. (本小题 13 分)

在 $\triangle ABC$ 中, $\sin 2C = \sqrt{3} \sin C$.

(1) 求 $\angle C$;

(2) 若 $b = 6$, 且 $\triangle ABC$ 的面积为 $6\sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

[答案] (1) $\frac{\pi}{6}$; (2) $6 + 6\sqrt{3}$.

[解析] (1) 由 $\sin 2C = \sqrt{3} \sin C$, 因此

$$2 \sin C \cos C = \sqrt{3} \sin C$$

又因为在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C \in (0, \pi)$, 故 $\sin C \neq 0$, 因此 $\cos C = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\angle C = \frac{\pi}{6}$.

(2) 由 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = 6\sqrt{3}$, 且 $\angle C = \frac{\pi}{6}$, $b = 6$, 解得 $a = 3\sqrt{3}$,

在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理得 $c^2 = a^2 + b^2 - 2bc \cos C$, 即 $c^2 = (4\sqrt{3})^2 + 6^2 - 2 \cdot 4\sqrt{3} \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12$,

故 $c = 2\sqrt{3}$, 因此 $\triangle ABC$ 的周长 $C_{\triangle ABC} = a + b + c = 6 + 6\sqrt{3}$.

17. (本小题 14 分)

如图, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 侧面 BCC_1B_1 为正方形, 平面 $BCC_1B_1 \perp$ 平面 ABB_1A_1 , $AB = BC = 2$, M, N 分别为 A_1B_1, AC 的中点.

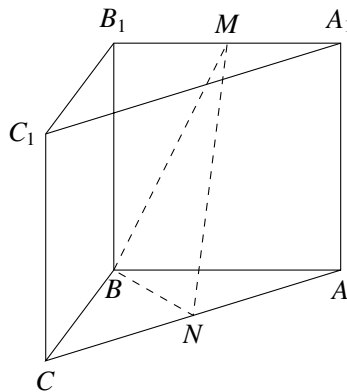
(1) 求证: $MN \parallel$ 平面 BCC_1B_1 ;

(2) 再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知, 求直线 AB 与平面 BMN 所成角的正弦值.

条件①: $AB \perp MN$;

条件②: $BM = MN$.

注: 如果选择条件①和条件②分别解答, 按第一个解答计分.



[答案] (1) 略; (2) $\frac{2}{3}$.

[解析] (1) 取 BC 中点 D , 连接 B_1D, DN , 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $A_1B_1 \parallel AB$, $A_1B_1 = AB$, 因为 M, N, D 分别为 A_1B_1, AC, BC 的中点, 因此 B_1M 平行且等于 $\frac{1}{2}AB$, DN 平行且等于 $\frac{1}{2}AB$, 即 $B_1M \parallel DN$ 且 $B_1M = DN$, 所以四边形 B_1MND 为平行四边形, 因此 $B_1D \parallel MN$, 又因为 $MN \not\subset$ 平面 BCC_1B_1 , $B_1D \subset$ 平面 BCC_1B_1 , 所以 $MN \parallel$ 平面 BCC_1B_1 .

(2) 选择条件①: 因为 BCC_1B_1 为正方形, 所以 $CB \perp BB_1$,

又平面 $BCC_1B_1 \perp$ 平面 ABB_1A_1 , 且平面 $BCC_1B_1 \cap$ 平面 $ABB_1A_1 = BB_1$,

所以 $CB \perp$ 平面 ABB_1A_1 , 而 $AB \subset$ 平面 ABB_1A_1 , 所以 $CB \perp AB$.

由 (1) 得 $B_1D \parallel MN$, 且 $AB \perp MN$, 所以 $AB \perp B_1D$, 而 $B_1D \cap CB = D$,

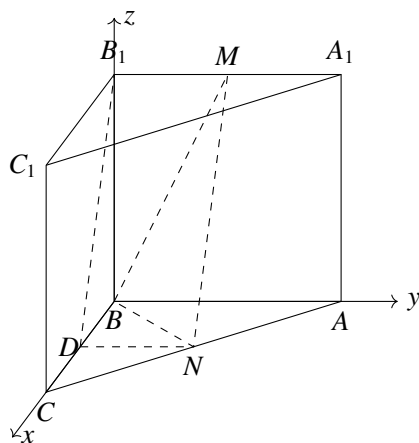
以 B 为原点, $\vec{BC}, \vec{BA}, \vec{BB}_1$ 为 x, y, z 轴正方向建系 $B-xyz$, 如图:

因为 $AB = BC = BB_1 = 2$, 则 $B(0, 0, 0)$, $N(1, 1, 0)$, $M(0, 1, 2)$, $A(0, 2, 0)$,

因此, $\vec{BN} = (1, 1, 0)$, $\vec{BM} = (0, 1, 2)$, $\vec{AB} = (0, -2, 0)$,

设平面 BMN 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 由

$$\begin{cases} \vec{BN} \cdot \mathbf{n} = 0 \\ \vec{BM} \cdot \mathbf{n} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$



令 $x=2$, 得 $\boldsymbol{n}=(2,-2,1)$. 设直线 AB 与平面 BMN 所成角 θ , 则

$$\sin \theta = |\cos \langle \boldsymbol{n}, \overrightarrow{AB} \rangle| = \frac{|\boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{AB}|}{|\boldsymbol{n}| \cdot |\overrightarrow{AB}|} = \frac{|4|}{3 \times 2} = \frac{2}{3},$$

所以直线 AB 与平面 BMN 所成角的正弦值为 $\frac{2}{3}$.

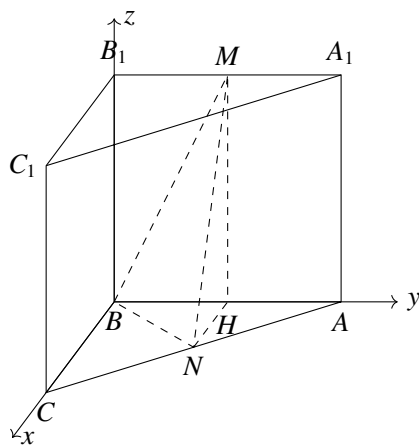
选择条件②: 取 AB 中点 H , 连接 HM, HN , 因为 M, N, H 为 A_1B_1, AC, AB 中点,

所以 $B_1B // MH, CB // NH$, 而 $CB \perp BB_1$, 故 $NH \perp MH$, 又因为 $AB = BC = 2$, 所以 $NH = BH = 1$,

在 $\triangle MHB$ 和 $\triangle MHN$ 中, $BM = MN, NH = BH$, 公共边 MH , 因此 $\triangle MHB \cong \triangle MHN$,

因此 $\angle MHN = \angle MHB = 90^\circ$, $MH \perp AB, BB \perp AB$, 三棱锥 $ABC - A_1B_1C_1$ 中,

以 B 为原点, $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BB_1}$ 为 x, y, z 轴正方向建系 $B - xyz$, 如图: (计算同条件①)



18. (本小题 13 分)

在校运动会上, 只有甲、乙、丙三名同学参加铅球比赛, 比赛成绩达到 $9.50m$ 以上 (含 $9.50m$) 的同学将获得优秀奖. 为预测获得优秀奖的人数及冠军得主, 收集了甲、乙、丙以往的比赛成绩, 并整

理得到如下数据 (单位 m):

甲: 9.80, 9.70, 9.55, 9.54, 9.48, 9.42, 9.40, 9.35, 9.30, 9.25;

乙: 9.78, 9.56, 9.51, 9.36, 9.32, 9.23;

丙: 9.85, 9.65, 9.20, 9.16.

假设用频率估计概率, 且甲、乙、丙的比赛成绩相互独立.

- (1) 估计甲在校运动会铅球比赛中获得优秀奖的概率;
- (2) 估计 X 是甲、乙、丙在校运动会铅球比赛中获得优秀奖的总人数, 估计 X 的数学期望 EX ;
- (3) 在校运动会铅球比赛中, 甲、乙、丙谁获得冠军的概率估计值最大? (结论不要求证明)

[答案] (1) $\frac{2}{5}$; (2) $\frac{7}{5}$; (3) 丙.

[解析] (1) 设 $A =$ 甲在校运动会铅球比赛中获得优秀奖, 9.50 以上的成绩有 9.80, 9.70, 9.55, 9.54,

因此甲在校运动会铅球比赛中获得优秀奖的概率 $P(A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

(2) $X = 0, 1, 2, 3$, 设 B, C 事件分别为乙、丙在校运动会铅球比赛中获得优秀奖, 则

$$P(B) = \frac{1}{2}, P(C) = \frac{1}{2},$$

因此

$$P(X=0) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{20},$$

$$P(X=1) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{5},$$

$$P(X=2) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{20},$$

$$P(X=3) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{10},$$

所以 X 的分布列:

X	0	1	2	3
P	$\frac{3}{20}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{1}{10}$

因此, $E(X) = 0 \times \frac{3}{20} + 1 \times \frac{2}{5} + 2 \times \frac{7}{20} + 3 \times \frac{1}{10} = \frac{7}{5}$.

(3) 丙夺冠的概率最大, 理由如下:

[法 1. 直觉判断] 因为丙的最好成绩 $9.80m$ 为甲、乙、丙最高.

[法 2. 概率计算] 分别计算甲、乙、丙夺冠的概率:

$$P(\text{乙}) = \frac{1}{6} \times \frac{9}{10} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{6} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{10} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{13}{48};$$

$$P(\text{丙}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{4}{5} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{12};$$

$$P(\text{甲}) = 1 - \frac{5}{12} - \frac{13}{48} = \frac{5}{16}.$$

因此, $P(\text{丙})$ 最大, 所以丙夺冠的概率最大.

19. (本小题 15 分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个顶点为 $A(0, 1)$, 焦距为 $2\sqrt{3}$.

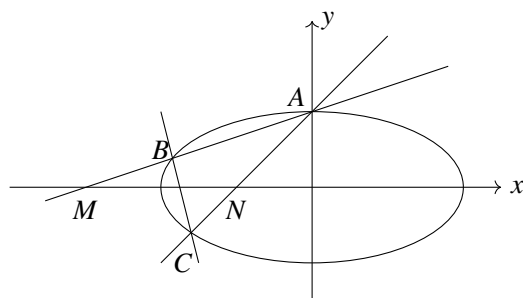
(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 过点 $P(-2, 1)$ 作斜率为 k 的直线与椭圆 E 交于不同的两点 B, C , 直线 AB, AC 分别与 x 轴交于点 M, N . 当 $|MN| = 2$ 时, 求 k 的值.

[答案] (1) $E: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$; (2) $k = -4$.

[解析] (1) 由于
$$\begin{cases} \frac{1}{b^2} = 1 \\ 2c = 2\sqrt{3} \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = \sqrt{3} \end{cases}, \text{ 因此 } E: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

(2) 根据题意画出草图:



[法 1] 设 $BC: y - 1 = k(x + 2)$, 即 $y = kx + 2k + 1$, 设 $B(x_1, y_1), C(x_2, y_2)$,

则 $l_{AB}: y - 1 = \frac{y_1 - 1}{x_1}x$, 令 $y = 0$, $x_M = \frac{x_1}{1 - y_1}$, 同理得 $x_N = \frac{x_2}{1 - y_2}$,

由题, $|x_M - x_N| = \left| \frac{x_1}{1 - y_1} - \frac{x_2}{1 - y_2} \right| = \left| \frac{x_1(1 - y_2) - x_2(1 - y_1)}{(1 - y_1)(1 - y_2)} \right| = 2$, 所以

$$|2k(x_1 - x_2)| = 2k^2|x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4|,$$

联立
$$\begin{cases} y = kx + 2k + 1 \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow (1 + 4k^2)x^2 + 8k(2k + 1)x + 4(2k + 1)^2 - 4 = 0$$
, 解得

$$x_1 + x_2 = \frac{-8k(2k + 1)}{1 + 4k^2}, \quad x_1x_2 = \frac{4(4k^2 + 4k)}{1 + 4k^2},$$

所以 $x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4 = \frac{16k^2 + 16k - 32k^2 - 16k + 16k^2 + 4}{1 + 4k^2} = \frac{4}{1 + 4k^2}$.

又 $|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{8\sqrt{-k}}{1+4k^2} = -k \cdot \frac{4}{1+4k^2}$, 所以 $64(-k) = 64k^2 \Rightarrow k = -4$.

[法 2] 设 $l_{BM}: x = t_1(y-x)$, 令 $y=0$ 得 $x_M = -t_1$;

设 $l_{AM}: x = t_2(y-1)$, 令 $y=0$ 得 $x_N = t_2$.

令 $M(-t_2, 0)$, $N(-t_2, 0)$, 因为 $|MN| = 2$, 所以 $|t_2 - 2t_1| = 2$,

$$\text{联立} \begin{cases} x = t_1(y-1) \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow (4+t_1^2)y^2 - 2t_1y + t_1^2 - 4 = 0.$$

又 $y_A = 1$, $y_A \cdot y_B = \frac{t_1^2 - 4}{t_1^2 + 4}$, 所以将 $y_B = \frac{t_1^2 - 4}{t_1^2 + 4}$ 代入 l_{BN} 得 $x_B = \frac{-8t_1}{t_1^2 + 4}$,

即 $B(\frac{-8t_1}{t_1^2 + 4}, \frac{t_1^2 - 4}{t_1^2 + 4})$, 同理可得: $C(\frac{-8t_2}{t_2^2 + 4}, \frac{t_2^2 - 4}{t_2^2 + 4})$.

又因 B, C, P 三点共线, 且 k_{PB}, k_{PC} 都存在, 所以 $k_{PB} - k_{PC} = 0$, 即

$$\frac{\frac{t_1^2 - 4}{t_1^2 + 4} - 1}{\frac{-8t_1}{t_1^2 + 4} + 2} - \frac{\frac{t_2^2 - 4}{t_2^2 + 4} - 1}{\frac{-8t_2}{t_2^2 + 4} + 2} = 0.$$

化简得: $t_1 + t_2 = 4$. 所以 $k = k_{BC} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{\frac{t_1^2 - 4}{t_1^2 + 4} - \frac{t_2^2 - 4}{t_2^2 + 4}}{\frac{-8t_1}{t_1^2 + 4} - \frac{-8t_2}{t_2^2 + 4}} = \frac{t_1 + t_2}{t_1 t_2 - 4}$.

又 $|t_2 - t_1| = 2$, $t_1 + t_2 = 4$, 因此 $t_1 t_2 = 3$, $k = \frac{t_1 + t_2}{t_1 t_2 - 4} = -4$.

20. (本小题 15 分)

已知函数 $f(x) = e^x \ln(1+x)$.

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(2) 设 $g(x) = f'(x)$, 讨论函数 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上的单调性;

(3) 证明: 对任意的 $s, t \in (0, +\infty)$, 有 $f(s+t) > f(s) + f(t)$.

[答案] (1) $y = x$; (2) 略; (3) 略.

[解析] (1) $f'(x) = e^x[\ln(x+1) + \frac{1}{x+1}]$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, 因此切线方程 $y = x$.

(2) 令 $g(x) = f'(x) = e^x[\ln(x+1) + \frac{1}{x+1}]$, $g'(x) = e^x[\ln(x+1) + \frac{2x+1}{(x+1)^2}] > 0$ 对 $\forall x > 0$ 恒成立, 因此, $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

(3) [法 1] 令 $h(x) = f(x+s) - f(x) - f(s)$, $h'(x) = f'(x+s) - f'(x)$,

因为 $s > 0$, 由 (2) 得 $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f'(x+s) > f'(x)$,

所以 $h(x) > 0$ 对 $\forall x > 0$ 恒成立, $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $h(x) > h(0) = f(s) - f(0) - f(s) = -f(0) = 0$, 因此 $f(s+t) > f(t) + f(s)$.

[法 2] 函数 $f(x)$ 在 $[s, s+t]$ 上连续且可导, 即满足拉格朗日中值定理的条件, 于是存在 $\xi \in (s, s+t)$,

$$f'(\xi) = \frac{f(s+t) - f(s)}{(s+t) - s}$$

即 $f(s+t) - f(s) = t f'(\xi)$. 同时, 在 $[0, t]$ 上, 存在 $\eta \in (0, t)$,

$$f'(\eta) = \frac{f(t) - f(0)}{t - 0}$$

即 $f(t) - f(0) = t f'(\eta)$. 由于 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 故 $f'(\xi) > f'(\eta)$, 所以 $f(s+t) - f(s) > f(t) - f(0) = f(t)$, 所以 $f(s+t) > f(s) + f(t)$. 证毕.

21. (本小题 15 分)

已知 $Q: a_1, a_2, \dots, a_k$ 为有穷整数数列. 给定正整数 m , 若对任意的 $n \in \{1, 2, \dots, m\}$, 在 Q 中存在 $a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_{i+j} (j \geq 0)$, 使得 $a_i + a_{i+1} + a_{i+2} + \dots + a_{i+j} = n$, 则称 Q 为 m -连续可表数列.

(1) 判断 $Q: 2, 1, 4$ 是否为 5-连续可表数列? 是否 6-连续可表数列? 说明理由;

(2) 若 $Q: a_1, a_2, \dots, a_k$ 为 8-连续可表数列, 求证: k 的最小值为 4;

(3) 若 $Q: a_1, a_2, \dots, a_k$ 为 20-连续可表数列, 且 $a_1 + a_2 + \dots + a_k < 20$, 求证: $k \geq 7$.

[答案] (1) 是 5-连续可表数列; 不是 6-连续可表数列; (2) 略; (3) 略.

[解析] (1) $a_1 = 2, a_2 = 1, a_1 + a_2 = 3, a_3 = 4, a_2 + a_3 = 5$, 因此 $Q: 2, 1, 4$ 为 5-连续可表数列; 无法用连续若干项的和表示 6 ($a_1 + a_3 = 6$ 但 a_1, a_3 不连续), 因此 $Q: 2, 1, 4$ 不为 6-连续可表数列.

(2) 必要性: 因为 a_k 为 8-连续可表数列, 即 Q 中存在 $a_i, a_{i+1}, \dots, a_{i+j}$ 使得 $\sum_{t=1}^j a_{i+t} = 1, 2, \dots, 8$,

当 $k \leq 3$ 时, $k = 1$ 时, $a_i + a_{i+1} + \dots + a_{i+j}$ 至多表示 1 个数 (a_1);

$k = 2$ 时, $a_i + a_{i+1} + \dots + a_{i+j}$ 至多表示 3 个数 ($a_1, a_2, a_1 + a_2$);

$k = 3$ 时, $a_i + a_{i+1} + \dots + a_{i+j}$ 至多表示 6 个数 ($a_1, a_2, a_3, a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_1 + a_2 + a_3$);

由于 $k \leq 3$ 时至多可表示的数均小于 8, 因此 $k \geq 4$, 下证充分性.

充分性: 构造出 $Q: \{3, 1, 2, 5\}$, 满足 $k = 4$. 证毕.

(3) 当 $k \leq 6$ 时, 由 (2) 知 $k \leq 3$ 时至多可表示 6 个数, 下面说明 $k \in [4, 6]$:

$k = 4$ 时, $a_i + a_{i+1} + \dots + a_{i+j}$ 至多表示 10 个数;

$k = 5$ 时, $a_i + a_{i+1} + \dots + a_{i+j}$ 至多表示 15 个数;

$k = 6$ 时, $a_i + a_{i+1} + \dots + a_{i+j}$ 至多表示 21 个数.

发现 $k < 6$ 时至多可表示的数均小于 20, 与题意不符. 下面讨论 $k = 6$ 的情况:

首先, 数列 $\{a_n\}$ 中不能出现相同的两项. 若 $\exists a_m = a_k (m < k)$, 则 $a_m + \dots + a_{k-1} = a_{m+1} + \dots + a_k$,

其次, 由于 $Q: a_1, a_2, \dots, a_k$ 为 20-连续可表数列且 $a_1 + a_2 + \dots + a_k < 20$,

则 $\exists i \in \{1, 2, \dots, k\}$ 使 $a_i < 0$, 且对于 $a = 6$, 至多有一个数小于 0, 另外 20 个数为 $1 \sim 20$,

若 $i \neq 1$ 或 6 , 则 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{i-1}$ 与 $a_{i+1} + \cdots + a_6$ 中必有一个为 20 ,

若 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{i-1} = 20$, 则 $a_i + a_{i+1} + \cdots + a_6 < 0$ 为另一个小于 0 的可能取值, 矛盾.

若 $i = 1$ 或 6 , 根据对称性 $i = 1, 6$ 效果一致, 不妨设 $a_1 < 0$. 进而讨论 $Q: a_1, \cdots, a_6$ 中是否有 1 :

①若无 1 , 则 $a_2 \geq 2, a_1 + a_2 = 1$,

$$19 - a_1 - a_2 \geq a_3 + \cdots + a_6 \geq 3 + 4 + 5 + 6 = 18 \Rightarrow a_1 = -1, a_2 = 2$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = a_3 + 1 \neq a_4, a_5, a_6 \Rightarrow a_3 = 6.$$

可能成立的数列为

$$-1, 2, 6, 3, 5, 4 (6 + 3 = 5 + 4, \text{ 矛盾})$$

$$-1, 2, 6, 4, 5, 3 (2 + 6 = 5 + 3, \text{ 矛盾})$$

②若有 1 , 则 $a_1 + a_2 \geq 2$, 所以 $a_2 \geq 3$ ($a_1 = -1$), 则

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \geq -1 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 > 20, \text{ 矛盾.}$$

综上, $k \geq 7$.

(考生务必将答案答在答题卡上, 在试卷上作答无效)